

# Modélisation dynamique des structures multicouches à l'aide du modèle SCLS1

## *Dynamic analysis of multilayered plates using SCLS1 model*

Paul BOUTEILLER<sup>1</sup>, Jeremy BLEYER<sup>1</sup>, Jean François CARON<sup>1</sup> et Karam SAB<sup>1</sup>

<sup>1</sup> : Université Paris-Est, Laboratoire Navier UMR 8205 (École des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS)  
École des Ponts Paristech  
6 et 8 Avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée, France  
e-mail : paul.bouteiller@enpc.fr, jeremy.bleyer@enpc.fr, jean-francois.caron@enpc.fr et karam.sab@enpc.fr

### Résumé

Pour surmonter les lacunes des modèles de *monocouche équivalente* à prédire les contraintes aux voisinages des bords libres dans les plaques multicouches, le laboratoire Navier a développé plusieurs modèles, dits *multi-particulaires*, pour lesquels l'effort inter-laminaire est un des efforts généralisé du modèle. Le modèle SCLS1 est le plus riche de cette gamme et représente le stratifié par une succession de plaques de type Reissner-Mindlin couplées par des efforts inter-laminaires de cisaillement et d'arrachement. Le modèle permet une estimation précise de la contrainte de cisaillement aux interfaces ainsi que le respect de la condition de bord libre. Nous présentons tout d'abord la formulation statique du modèle SCLS1 dérivée du modèle 3D en faisant l'hypothèse d'une répartition linéaire par couche de la contrainte membranaire. Le modèle est alors construit en imposant de vérifier les équations d'équilibre 3D. Un principe de moindre action *en contraintes* est ensuite utilisé pour étendre notre modèle aux régimes dynamiques et identifier les masses généralisées du modèle. Enfin une analyse modale de quelques plaques anisotropes est effectuée afin de valider le modèle. Toutes nos simulations ont été conduites à l'aide du logiciel open source FEniCS permettant la résolution d'équations aux dérivées partielles sous forme variationnelle.

### Abstract

To overcome the inaccurate estimations of local response near free-edges of equivalent single-layer theories, a collection of layerwise models have been developed by the Navier laboratory in which the interlaminar shear stress is one of the generalized forces. The latest one (SCLS1) with first-order membrane stresses is introduced below. The laminated plate is considered as a superposition of Reissner-Mindlin plates coupled by shear and normal interface stresses. The model ensures an accurate estimation of the shear stress and respect the free edge boundary conditions.

First the equations of the SCLS1 model are derived from the 3D Cauchy model under the assumption of piecewise linear membrane stress. The model is then built by satisfying the 3D equilibrium equations. A modified principle of least action, expressed in terms of stresses, is then used to extend the model to dynamics. A modal analysis of various anisotropic plates is then performed to validate our model. All the simulations have been implemented using the open source FEniCS platform for solving partial differential equations.

**Mots Clés :** Structures multicouches, Composites, Effort d'interface, Analyse modale

**Keywords :** Multilayer, Composites, Interfacial stress, Modal analysis

## 1. Présentation du modèle SCLS1

Le modèle SCLS1 est un modèle multiparticulaire dérivé du modèle 3D exact en se restreignant aux champs de contraintes statiquement admissibles et possédant une approximation des contraintes membranaires de degré 1 par couche [?].

À partir de cette hypothèse, l'écriture des équations d'équilibre 3D conduit à  $6n + 1$  équations d'équilibre généralisées où  $n$  désigne le nombre de couches. La cinématique du modèle SCLS1 est obtenue par dualisation des équations d'équilibre et possède donc  $6n + 1$  degrés de libertés en chaque point de la surface moyenne de la plaque :

Équations d'équilibres	Déplacements généralisés associés
$\underline{0} = \underline{\text{div}}(\underline{N}^i)(x, y) + \underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y)$	$\underline{U}^i(x, y)$
$0 = \text{div}(\underline{Q}^i)(x, y) + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y)$	$U_3^i(x, y)$
$\underline{0} = \underline{\text{div}}(\underline{M}^i)(x, y) - \underline{Q}^i(x, y) + \frac{\epsilon^i}{2}(\underline{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \underline{\tau}^{i-1,i}(x, y))$	$\underline{\Phi}^i(x, y)$
$0 = \text{div}(\underline{\tau}^{k,k+1})(x, y) - \pi^{k,k+1}(x, y)$	$V^{k,k+1}(x, y)$

où les efforts généralisés  $\underline{N}^i, \underline{M}^i, \underline{Q}^i$  sont les efforts membranaires, les moments de flexions et les efforts tranchants classiques de chaque couche. Les efforts  $\underline{\tau}^{i,i+1}, \nu^{i,i+1}$  correspondent aux contraintes de cisaillement et d'arrachement à l'interface entre les plis  $i$  et  $i + 1$ . Enfin, l'effort généralisé  $\pi^{i,i+1}$  correspond, quant à lui, à la divergence du cisaillement et est introduit de manière à ne négliger aucune contribution à l'énergie élastique complémentaire contrairement à d'autres modèles multiparticulaires développés antérieurement [?].

Les déplacements  $\underline{U}^i, U_3^i$  correspondent aux déplacements moyens dans le plan et hors plan de la couche  $i$ ,  $\underline{\Phi}^i$  correspond à la rotation moyenne et enfin le déplacement généralisé  $V^{k,k+1}$  est relié à la différence des déplacements verticaux de deux plis consécutifs.

Les relations de comportement généralisées sont obtenues en reliant les efforts généralisés aux déformations généralisées en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire. La formulation variationnelle nécessaire à l'implémentation éléments finis s'obtient en dualisant chacune des équations d'équilibres mentionnées ci-dessus par son déplacement généralisé associé. Bien que le modèle soit initialement formulé à partir des contraintes 3D, sa résolution numérique est effectuée de manière classique par une approche en déplacements.

## 2. Extension au cas dynamique

La principale difficulté d'extension au cas dynamique du modèle SCLS1 réside dans l'expression de l'accélération apparaissant au second membre de l'équation de la dynamique tridimensionnelle. En effet, notre seul postulat a porté sur la distribution de contraintes dans l'épaisseur et non sur la cinématique. Afin de poursuivre et d'être cohérent dans la dérivation du modèle,

nous devons donc employer un principe formulé en contraintes pour obtenir l'expression des masses généralisées associées aux degrés de libertés du modèle.

## 2.1. Principe de moindre action en contraintes

Le principe de moindre action (ou principe d'Euler-Lagrange) postule que la dynamique d'un système est entièrement déterminée par un Lagrangien  $\mathcal{L}(\underline{u}, \dot{\underline{u}})$  dépendant de la position, de la vitesse et éventuellement explicitement du temps [? ].

La trajectoire physique est sélectionnée par le fait que l'action entre deux instant voisins :

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\psi(\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}]) - \frac{1}{2}\rho\dot{\underline{u}}.\dot{\underline{u}} - \rho\underline{f}.\underline{u})d\Omega - \int_{\partial_N\Omega} \underline{T}^D.\underline{u} dSdt \quad (\text{Eq. 1})$$

est extrémale.

Si nous introduisons les multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{r}$  associés à l'équation de compatibilité  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\nabla}\underline{u}$  et à l'égalité  $\dot{\underline{u}} = \underline{v}$  nous obtenons, après élimination des grandeurs cinématiques, que la stationnarité de l'action se traduit par la recherche d'un minimum  $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{r}$  sur l'ensemble des champs statiquement admissibles définis ci-dessous :

$$\min_{\underline{\underline{\sigma}}, \underline{r} \in \mathcal{S}^{ad}} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \psi^*(\underline{\underline{\sigma}}) - \frac{1}{2\rho}\underline{r}.\underline{r} d\Omega dt + \int_{\Omega} [\underline{r}.\underline{U}]_{t_1}^{t_2} d\Omega \quad (\text{Eq. 2})$$

où

$$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{r} \in \mathcal{S}^{ad} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}, t) + \rho\underline{f}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{r}}(\underline{x}, t) \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t) = \underline{T}^D(\underline{x}, t) \text{ sur } \partial_N\Omega \end{cases} \quad (\text{Eq. 3})$$

et où  $\underline{r}$  s'interprète comme la quantité de mouvement locale.

Nous postulons ensuite une distribution de  $\underline{r}$  polynomiale compatible avec la distribution dans l'épaisseur des équations d'équilibre. Nous aboutissons, finalement, à une relation impulsion-vitesse de la forme :  $\{ \dot{\underline{U}} \} = [D]\{ \underline{R} \}$  où l'on a noté :

$$\begin{aligned} {}^t\{ \underline{U} \} &= \{ U_1^1, U_2^1, U_3^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, U_1^n, U_2^n, U_3^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n, V^{0,1}, \dots, V^{n,n+1} \} \\ {}^t\{ \underline{R} \} &= \{ r_1^{1,0}, r_2^{1,0}, r_3^{1,0}, r_1^{1,1}, r_2^{1,1}, \dots, r_1^{n,0}, r_2^{n,0}, r_3^{n,0}, r_1^{n,1}, r_2^{n,1}, r_3^{[0,1]}, \dots, r_3^{[n,n+1]} \} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4})$$

L'inversion de la matrice  $[D]$  nous donne par la suite accès à la matrice de masse locale du multicouche.

## 2.2. Validation de la dynamique par des analyses modales

Nous considérons un composite stratifié épais dont l'éclatement est fixé à 10. Le degré d'orthotropie de chaque couche est fixé par le rapport des modules d'Young  $E_1$  et  $E_2$  dans le sens longitudinal et transversal respectivement. Nous prendrons pour paramètres physiques les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= 30\text{MPa}, E_2 = E_3 = 1\text{MPa}, G_{12} = G_{13} = \mu_L = 0.6E_2, G_{23} = \mu_T = 0.5E_2 \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \end{aligned}$$

La plaque est de côté unitaire et est encadrée sur son bord. Les 10 premières pulsations propres sont données pour un empilement 90/0/90/0 avec un ratio des module d'Young de 30. La comparaison s'effectuera par rapport au code de calcul Simulia pris comme référence.

Mode	Simulia(Hz)	SCLS1(Hz)	Écart relatif(%)
1	0.33773	0.337351	-0.112219821
2	0.56432	0.563251	-0.189431528
3	0.56432	0.563443	-0.155408279
4	0.7281	0.726672	-0.196126906
5	0.85788	0.856004	-0.218678603
6	0.85952	0.857715	-0.210000931
7	0.97793	0.975521	-0.24633665
8	0.97793	0.975878	-0.209830969
9	1.1751	1.171798	-0.280997362

## Références

- [1] J. Aboudi. Micro-electromechanics of soft dielectric matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 64-65 :30–41, 2015.
- [2] M.F. Adams, H. Bayraktar, T.M. Keaveny, and P. Papadopoulos. Ultrascalable implicit finite element analyses in solid mechanics with over a half a billion degrees of freedom. In *Proceedings of the 2004 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, page 34. IEEE Computer Society, 2004.
- [3] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran, and K. Elkhodary. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John wiley & sons, 2013.