Méthodes MsFEM pour les plaques hétérogènes

S. BRISARD[a], V. EHRLACHER[b,c]

a. Université Paris-Est, Laboratoire Navier, UMR 8205, CNRS, ENPC, IFSTTAR, F-77455 Marne-la-Vallée, France — sebastien.brisard@ifsttar.fr

b. Université Paris-Est, CERMICS, ENPC, F-77455 Marne-la-Vallée, France — virginie.ehrlacher@enpc.fr

c. Inria Paris, Matherials Project-Team, F-75589 Paris Cedex 12, France

Résumé

Lorsque les échelles de la structure et des hétérogénéités ne sont pas séparées, un calcul par éléments finis nécessite en principe que toutes les hétérogénéités soient maillées. La génération du maillage et le calcul de structure associé peuvent alors être très coûteux. La méthode des éléments finis multi-échelle (MsFEM) permet de s'affranchir de cette exigence en introduisant pour chaque élément des fonctions de forme spécifiques qui tiennent compte des hétérogénéités qu'il contient.

En mécanique des milieux continus, le cadre méthodologique (comment générer de bonnes *fonctions de forme enrichies) et théorique (estimateurs d'erreur a priori et a posteriori) de cette approche est maintenant bien établi [1, 2]. Ainsi, les fonctions de forme MsFEM sont généralement définies comme la solution d'un problème d'élasticité auxiliaire dans lequel des déplacements affines sont imposés au bord de l'élément.*

Nous proposons une extension de l'approche MsFEM aux plaques hétérogènes. Comme pour les formulations de type solid shell *[3], le maillage de la plaque comporte un unique élément (parallélépipède) dans l'épaisseur. Le problème auxiliaire permettant la génération des fonctions de forme enrichies se distingue de celui couramment utilisé en mécanique du milieu continu afin de rendre compte des spécificités du comportement des plaques.*

Abstract

When the macro- and microscopic length scales are not separated, finite element simulations require complex meshes that follow the boundaries between heterogeneities. Generating such a mesh, and computing the corresponding state of the structure can be very costly. The Multiscale Finite Element Method (MsFEM) circumvents this cost issue by relaxing the requirement for a conforming mesh. The classical shape functions are then replaced with enriched shape functions that better account for the heterogeneities intersected by each element.

In continuum mechanics, the general MsFEM framework is now well-established. Procedures that deliver "good" enriched shape functions are known, and both a-priori and a-posteriori error estimators are available [1, 2]. The MsFEM shape functions are thus generally defined as the solution to an auxiliary problem of elastic equilibrium of the macro-element, with prescribed (affine) displacements at the boundary.

We extend the MsFEM approach to heterogeneous plates. Like solid-shell elements [3], the full depth of the plate is meshed with only one macro-element. The auxiliary problem that leads to the MsFEM shape

functions differs from the problem used in continuum mechanics so as to account for specific features of the behaviour of plates.

Mots clefs : plaques, éléments finis multi-échelles, modèles hiérarchiques, éléments *solid shell*

1 Introduction

La modélisation par éléments finis de matériaux hétérogènes nécessite généralement un maillage conforme de la microstructure, rendant compte de toutes les hétérogénéités. La génération du maillage devient ainsi une tâche très complexe. Par ailleurs, le nombre de degrés de liberté peut rapidement exploser. Ainsi, dans un composite de type matrice–inclusions, il est nécessaire de mailler finement la matrice dans les zones où les inclusions sont proches les unes des autres.

La méthode MsFEM (Multiscale Finite Element Method) permet de s'affranchir de cette contrainte en autorisant la présence d'hétérogénéités au sein même des éléments [1]. Ces éléments hétérogènes seront nommés *macro-éléments* dans ce qui suit. Si aucune précaution n'est prise, on observe alors une dégradation du taux de convergence (en fonction de la taille du maillage), comme le montrent par exemple Moës, Cloirec, Cartraud et Remacle [4] (voir en particulier la figure 6 de cet article).

Un remède possible à cette dégradation des performances est de substituer aux fonctions de forme classiques de chaque macro-élément des fonctions de forme *enrichies*, qui rendent mieux compte des hétérogénéités. Ces fonctions de forme enrichies sont définies par des problèmes aux limites formulés *sur chaque macro-élément* (ou sur un petit sous-ensemble de macro-éléments contigüs). Ils sont résolus par éléments finis (en utilisant un maillage fin, conforme de chaque macro-élément).

Considérons par exemple une structure élastique $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dont la raideur est $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Omega$. La structure est discrétisée en N_{macro} macro-éléments $(\Omega_e)_{e=1,\dots,N_{\text{macro}}}$. Chaque élément compte N_{dofs} degrés de liberté et on note $(\mathbf{\Phi}_{e,i})_{i=1,\dots,N_{\text{dofs}}}$ les fonctions de forme usuelles (par exemple, P_1) de l'élément e. Noter que ces fonctions de forme sont *vectorielles*, de sorte que le champ de déplacement dans l'élément e s'exprime comme une combinaison linéaire des $\mathbf{\Phi}_{e,i}$.

Dans l'approche classique, les coefficients de la matrice de raideur élémentaire ont alors pour expression

$$K_{e,ij} = a_e(\mathbf{\Phi}_{e,i}, \mathbf{\Phi}_{e,j}), \tag{1}$$

où a_e désigne la forme bilinéaire élémentaire

$$a_e(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{v}](\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V_{\mathbf{x}}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{u}] = \mathbf{sym\,grad}[\mathbf{u}]. \tag{2}$$

Dans l'approche MsFEM, les fonctions de forme enrichies $\mathbf{\Psi}_{e,i}$ sont obtenues en résolvant préalablement, sur chaque élément Ω_e, le problème variationnel suivant

$$\text{Trouver} \quad \mathbf{\Psi}_{e,i} \in \mathbf{\Phi}_{e,i} + \mathbf{V}_0(\Omega_e) \quad \text{tel que} \quad a_e(\mathbf{\Psi}_{e,i}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\Omega_e), \tag{3}$$

où $\mathbf{V}_0(\Omega_e)$ désigne l'espace des champs de déplacement à composantes dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega_e)$ (ils sont en particulier nuls au bord de l'élément). Le problème variationnel (3) exprime l'équilibre de l'élément soumis

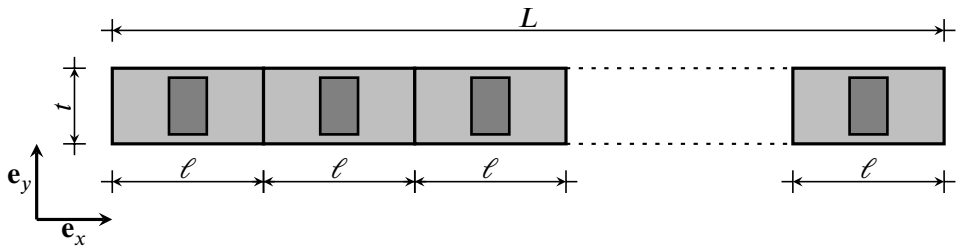


Fig. 1 : La plaque périodique considérée

à un déplacement au bord coïncidant avec celui de la fonction de forme classique correspondante. Les coefficients de la matrice de raideur élémentaire ont alors pour expression

$$K_{e,ij}^{\text{MsFEM}} = a_e(\boldsymbol{\Psi}_{e,i}, \boldsymbol{\Psi}_{e,j}). \tag{4}$$

La procédure d'assemblage du système global est alors inchangée, puisque l'élément fini ainsi enrichi a exactement le même nombre de degrés de liberté que l'élément classique dont il dérive.

2 Position du problème

On souhaite étendre l'approche précédente à une plaque hétérogène, en se plaçant dans un premier temps dans le cadre simplifié de l'élasticité plane (la plaque a une largeur infinie) et d'une microstructure périodique. Plus précisément, on considère une plaque $\Omega = [0, L] \times [0, t]$ de longueur L et d'épaisseur t, constituée de la répétition par périodicité d'un motif de longueur ℓ (voir figure 1). On note (x, y) les coordonnées dans le plan.

Dans l'approche proposée ici, les macro-éléments Ω_e sont constitués d'un nombre entier n de motifs élémentaires contigüs. En particulier, la plaque est maillée avec un seul macro-élément dans son épaisseur.

Il s'agit alors de définir sur $\Omega_e = [0, n\ell] \times [0, t]$ le problème permettant de construire les fonctions de forme enrichies. Comme dans le paragraphe 1, les équations de champs définissent l'équilibre élastique de l'élément en l'absence de forces réparties. Les conditions aux limites au bord $\partial\Omega_e$ de l'élément doivent en revanche tenir compte des spécificités des plaques.

Tout d'abord, les macro-éléments n'ont pas de voisins en faces supérieure et inférieure ($y = 0$ et $y = t$) : il n'est donc pas nécessaire d'y assurer la continuité du champ de déplacement. Au contraire, ces faces sont plutôt soumises à des conditions aux limites en contraintes. On fait l'hypothèse simplificatrice que la plaque est chargée en ses extrémités $x = 0$ et $x = L$ seulement. Il est alors naturel d'imposer pour les fonctions de forme enrichies des conditions aux limites de bord libre en faces supérieure et inférieure

$$\left(\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}[\boldsymbol{\Psi}_{e,i}]\right) \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{0} \qquad (y = 0,\ y = t). \tag{5}$$

Lorsque les faces supérieure et/ou inférieure de la plaque sont chargées, la condition (5) précédente doit être généralisée. On peut par exemple imposer au vecteur-contrainte de varier linéairement le long de ces deux bords (ce qui multiplie par 4 le nombre total de fonctions de forme enrichies).

Au droit des bords verticaux de l'élément ($x = 0$ et $x = n\ell$), il est en revanche nécessaire d'assurer la continuité des déplacements, qui sont donc prescrits. Contrairement à l'exemple du paragraphe 1, une

variation affine du champ de déplacement dans l'épaisseur n'est sûrement pas satisfaisante. Pour une plaque homogène, il est en effet connu [5-7] que les modèles hiérarchiques corrects sont les modèles dits $(n, n, n+1)$, pour lesquels on utilise une interpolation de degré n pour les composantes dans le plan du champ de déplacement, et $n+1$ pour la composante hors-plan. Pour une plaque hétérogène, les fonctions de forme enrichies doivent satisfaire à minima cette condition, et on impose donc à la composante horizontale (resp. verticale) du champ de déplacement de varier de façon linéaire (resp. quadratique) en $x = 0$ et $x = n\ell$.

Les fonctions de forme enrichies $(\boldsymbol{\Psi}_{e,i})_{i=1,\dots,N_{\text{dofs}}}$ proposées ici sont au nombre de $N_{\text{dofs}} = 10$ par élément. Elles sont définies par le problème variationnel suivant

$$\text{Trouver} \quad \boldsymbol{\Psi}_{e,i} \in \boldsymbol{\Phi}_{e,i} + \mathbf{V}_0^{\parallel}(\Omega_e) \quad \text{tel que} \quad a_e(\boldsymbol{\Psi}_{e,i}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^{\parallel}(\Omega_e), \tag{6}$$

où $\mathbf{V}_0^{\parallel}(\Omega_e)$ désigne l'espace des champs de déplacement à composantes dans $\mathrm{H}^1(\Omega_e)$, nuls le long des bords verticaux $x = 0$ et $x = n\ell$. Les fonctions de forme classiques $\boldsymbol{\Phi}_{e,i}$ sont quant à elles définies comme suit

$$\boldsymbol{\Phi}_{e,1} = \big(1-\xi\big)\big(1-\eta\big)\mathbf{e}_x, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e,6} = \xi\big(1-\eta\big)\mathbf{e}_x, \tag{7a}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{e,2} = \big(1-\xi\big)\big(1-\eta\big)\big(1-2\eta\big)\mathbf{e}_y, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e,7} = \xi\big(1-\eta\big)\big(1-2\eta\big)\mathbf{e}_y, \tag{7b}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{e,3} = \eta\big(1-\xi\big)\mathbf{e}_x, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e,8} = \xi\eta\,\mathbf{e}_x, \tag{7c}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{e,4} = \eta\big(1-\xi\big)\big(2\eta-1\big)\mathbf{e}_y, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e,9} = \xi\eta\big(2\eta-1\big)\mathbf{e}_y, \tag{7d}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{e,5} = 4\eta\big(1-\xi\big)\big(1-\eta\big)\mathbf{e}_y, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e,10} = 4\xi\eta\big(1-\eta\big)\mathbf{e}_y, \tag{7e}$$

où $\xi = x/(n\ell)$ et $\eta = y/t$ désignent les coordonnées réduites dans le macro-élément $(0 \le \xi, \eta \le 1$. Les degrés de liberté $(1,2)$, $(3,4)$, $(6,7)$ et $(8,9)$ correspondent respectivement aux deux composantes du déplacement des sommets $(0,0)$, $(0,t)$, $(n\ell,0)$ et $(n\ell,t)$ du macro-élément. Les degrés de liberté 5 et 10 correspondent au déplacement vertical des nœuds $(0,t/2)$ et $(n\ell,t/2)$, situés à mi-hauteur des arêtes verticales.

3 Résultats préliminaires

L'approche décrite dans le paragraphe 2 a été mise en œuvre sur une microstructure simple du type de celle représentée dans la figure 1, où les régions en gris foncé désignent des « inclusions », de dimensions $a \times b$. Les calculs sont effectués ici avec les valeurs suivantes

$$t = \ell/2, \quad a = \ell/R \quad \text{et} \quad b = \ell/3. \tag{8}$$

Par ailleurs, les caractéristiques élastiques de la matrice (indice m) et de l'inclusion (indice i) sont telles que

$$\mu_{\text{i}} = 10\mu_{\text{m}} \quad \text{et} \quad \nu_{\text{i}} = \nu_{\text{m}} = 0,3. \tag{9}$$

Le problème (6) est alors résolu numériquement par éléments finis, sur un maillage fin (et conforme !) du macro-élément Ω_e. Les fonctions de forme enrichies ainsi obtenues sont représentées sur la figure 2. Finalement, la matrice de raideur MsFEM est calculée à l'aide de la relation (4).

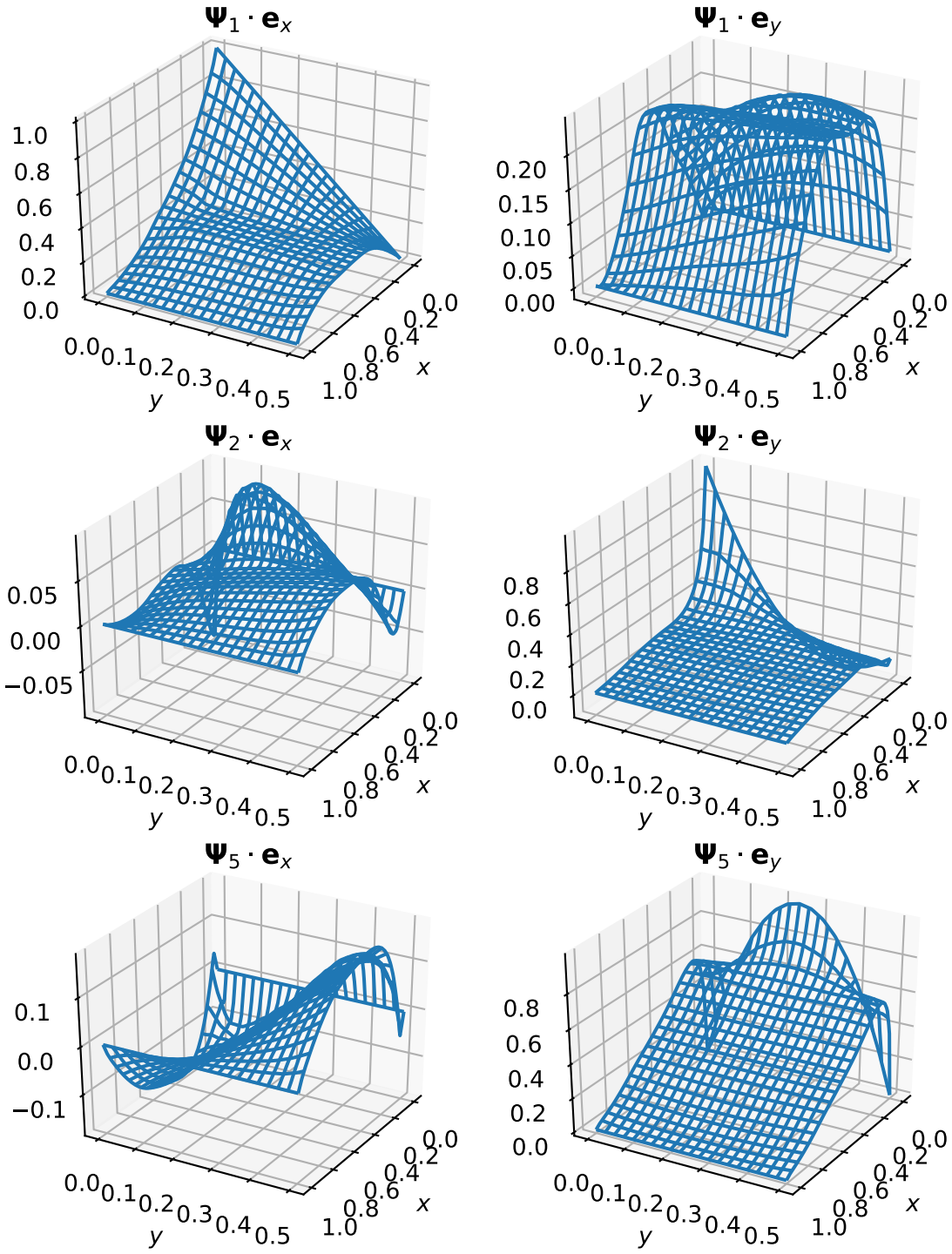


Fig. 2 : Fonctions de forme obtenues dans l'exemple du paragraphe 3. Compte-tenu des symétries, seules les fonctions de forme relatives à un coin et (degrés de liberté 1 et 2) et une arête (degré de liberté 5) ont été représentées.

4 Perspectives

Les travaux présentés ici ont permis de définir une méthode de construction de fonctions de formes enrichies pour des plaques hétérogènes. Il reste à vérifier la validité de cette approche, par une étude numérique de l'erreur commise dans l'approche MsFEM. Plusieurs études paramétriques sont ainsi à prévoir. En particulier, on fera varier le nombre total de motifs périodiques (élancement de la poutre), et le nombre n de motifs périodiques dans un macro-élément.

Le cadre défini ici sera ensuite étendu au cas de plaques chargées en faces supérieure et inférieure.

Enfin, une étude théorique de la convergence, s'inspirant de l'analyse théorique de la méthode MsFEM classique, sera proposée.

Références

[1] Y. Efendiev et T. Y. Hou. *Multiscale Finite Element Methods – Theory and Applications*. T. 4. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 2009.

[2] L. Chamoin et F. Legoll. "A Posteriori Error Estimation and Adaptive Strategy for the Control of MsFEM Computations". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 336 (1er juil. 2018), p. 1-38.

[3] F. Abed-Meraim et A. Combescure. "SHB8PS—a New Adaptative, Assumed-Strain Continuum Mechanics Shell Element for Impact Analysis". In : *Computers & Structures* 80.9 (1er avr. 2002), p. 791-803.

[4] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud et J.-F. Remacle. "A Computational Approach to Handle Complex Microstructure Geometries". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192.28–30 (18 juil. 2003), p. 3163-3177.

[5] J.-C. Paumier et A. Raoult. "Asymptotic Consistency of the Polynomial Approximation in the Linearized Plate Theory". In : *ESAIM : Proceedings* 2 (1997), p. 203-213.

[6] A. Rössle, M. Bischoff, W. Wendland et E. Ramm. "On the Mathematical Foundation of the (1,1,2)-Plate Model". In : *International Journal of Solids and Structures* 36.14 (1er mai 1999), p. 2143-2168.

[7] D. Braess, S. Sauter et C. Schwab. "On the Justification of Plate Models". In : *Journal of Elasticity* 103.1 (1er mar. 2011), p. 53-71.