

Rupture dynamique de matériaux fragiles en milieu hétérogène par un modèle à gradient d'endommagement

Jeremy Bleyer, Jean-François Molinari

▶ **To cite this version:**

Jeremy Bleyer, Jean-François Molinari. Rupture dynamique de matériaux fragiles en milieu hétérogène par un modèle à gradient d'endommagement. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899358

HAL Id: hal-01899358
https://hal.science/hal-01899358

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Rupture dynamique de matériaux fragiles en milieu hétérogène par un modèle à gradient d'endommagement

J. Bleyer[1,2], J.F. Molinari[2]

[1] *Laboratoire Navier, Ecole des Ponts ParisTech, Université Paris-Est, jeremy.bleyer@enpc.fr*
[2] *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Département de Génie Civil, {jeremy.bleyer,jean-francois.molinari}@epfl.ch*

Résumé — La rupture dynamique de matériaux fragiles est étudiée à l'aide d'un modèle à gradient d'endommagement (approche de type *phase-field*). Cette représentation continue permet de simuler efficacement des phénomènes intrinsèquement dynamiques tels que le branchement de fissures. Dans ce travail, nous étudions en particulier l'influence d'hétérogénéités sur la propagation dynamique et le processus de branchement. Nous montrons également que la ténacité effective du milieu hétérogène dépend fortement de la façon dont la fissure intéragit avec les hétérogénéités.
Mots clés — rupture dynamique, gradient d'endommagement, branchement de fissure

1 Introduction

La simulation de l'initiation et de la propagation des fissures dans le cadre de la rupture fragile constitue un enjeu majeur de l'évaluation de la durée de vie de nombreux composants industriels. Cette problématique fait encore aujourd'hui l'objet de nombreux développements, tant au niveau des modèles mécaniques que des méthodes numériques, du fait de la complexité des trajets de fissuration ainsi que du caractère mal posé de la mécanique de la rupture.

Si certaines approches numériques prennent le parti de suivre explicitement l'évolution du chemin de fissure (XFEM) ou de contraindre celle-ci à se propager le long d'interfaces définies par le maillage (éléments cohésifs), la représentation continue d'une fissure par un champ d'endommagement (ou champ de phase, *phase-field* en anglais) offre une alternative intéressante dans laquelle il n'est pas nécessaire de suivre explicitement la topologie de la fissure ni d'en contraindre le trajet *a priori*.

Néanmoins, il est bien connu que les modèles d'endommagement sont mal posés et conduisent à des localisations indésirables dépendantes du maillage. Différentes stratégies de régularisation ont été proposées afin de conduire à des modèles non-locaux faisant apparaître une échelle de longueur interne limitant la localisation de l'endommagement aux petites échelles.

L'une de ces stratégies provient de la régularisation de l'approche variationnelle de la mécanique de la rupture, proposée par Francfort et Marigo [3], par l'intermédiaire d'un modèle à gradient d'endommagement [2]. Contrairement à d'autres stratégies consistant à remplacer le tenseur de déformation local par un équivalent non-local (moyenne sur un domaine fini ou solution d'une équation aux dérivées partielles), cette approche bénéficie du cadre variationnel bien défini des matériaux standards généralisés. Ainsi, l'évolution du trajet de la fissure est dictée par un principe de minimum global de l'énergie sous des conditions d'irréversibilité d'évolution de la variable d'endommagement.

Différents travaux récents ont montré que ces modèles reproduisent bien certains aspects attendus de la mécanique de la rupture dans le cas quasi-statique pour une longueur interne tendant vers zéro, notamment en termes d'énergie dissipée (convergence vers le modèle de Griffith) ou de choix du chemin de propagation en mode mixte. En revanche, peu de travaux se sont intéressé au cadre de la rupture dynamique, hormis sur un plan purement numérique démontrant la possibilité pour une fissure de brancher en plusieurs fissures sans en étudier précisément les conditions. Cette communication poursuit les travaux entrepris dans [1] où nous avons étudié plus précisément comment ce type de modèle permet de reproduire différents aspects de la mécanique de la rupture dynamique tels que le branchement, l'existence d'une vitesse limite ou encore l'augmentation de l'énergie apparente dissipée avec la vitesse de la

fissure. Il est également connu que la présence d'hétérogénéités influence grandement le trajet de fissure et la ténacité apparente d'un matériau, d'autant plus dans le cas dynamique vis-à-vis du phénomène de branchement ou de l'interaction des ondes avec les hétérogénéités. Nous nous proposons d'étudier plus précisément cette situation de propagation dynamique en milieu hétérogène.

Dans la section 2, le modèle d'endommagement retenu ainsi que la stratégie de résolution numérique sont brièvement décrits. La section 3 discute des capacités de ce modèle à reproduire certains aspects de la mécanique de la rupture dynamique en milieu homogène. Enfin, la section 4 présente les résultats obtenus pour différentes configurations de propagation en milieu hétérogène.

2 Modèle à gradient d'endommagement pour la rupture dynamique

2.1 Approche variationnelle

Nous rappelons brièvement la formulation du modèle d'endommagement utilisé dans ce travail dans le cadre dynamique. Nous renvoyons à [4] et aux références qui y sont mentionnées pour plus de détails.

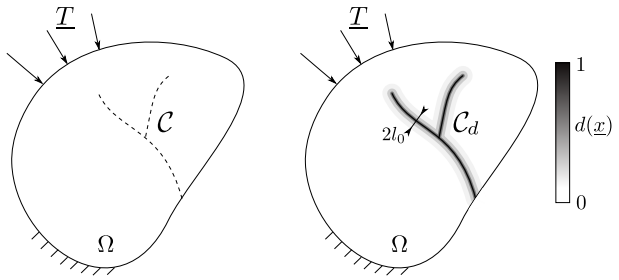


FIGURE 1 – Régularisation d'une fissure par un champ d'endommagement continu sur une longueur l_0.

Le modèle utilisé repose sur la définition d'une densité d'énergie élastique dépendant d'une variable scalaire (isotropie) d'endommagement $d \in [0;1]$ (Figure 1). La densité d'énergie élastique est supposée prendre la forme suivante

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) = (1-d)^2 \psi^+(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \psi^-(\underline{\underline{\varepsilon}}) \tag{1}$$

où $\psi^{\pm}$ représente une partie « positive » en traction (resp. « négative » en compression) permettant de ne faire porter l'endommagement que sur la partie en traction de ψ. Divers choix sont possibles pour effectuer cette distinction [4].
Une densité d'énergie de fissuration est également définie et dépend à la fois de d et de son gradient :

$$\phi(d, \underline{\nabla d}) = w(d) + W_0 l_0^2 \|\underline{\nabla d}\|^2 \tag{2}$$

où $w(d)$ est la partie locale de la densité d'endommagement, W_0 est homogène à une densité d'énergie et l_0 à une longueur. Cette longueur sert de régularisation au modèle d'endommagement de sorte que la localisation se fera le long d'une bande d'endommagement dont l'épaisseur est reliée à l_0. Le modèle retenu dans ce travail fait le choix d'une densité locale de la forme $w(d) = W_0 d$, contrairement à de nombreux travaux faisant l'hypothèse d'une dépendance en d^2. Ce choix est motivé par l'existence d'une phase purement élastique durant laquelle l'endommagement est strictement nul, contrairement au modèle quadratique pour lequel l'endommagement augmente dès l'application d'une contrainte non nulle. Plus précisément, le modèle retenu s'écrit :

$$\phi(d, \underline{\nabla d}) = \frac{3G_c}{8l_0}(d + l_0^2 \|\underline{\nabla d}\|^2) \tag{3}$$

où le cœfficient $3G_c/8l_0$ est choisi de sorte à ce que l'énergie dissipée pour la solution localisée 1D d'une barre en traction soit précisément G_c, identifié ici à l'énergie de fracture du modèle de Griffith.
Enfin, l'énergie cinétique n'est pas affectée par le niveau d'endommagement.

La formulation variationnelle du modèle, compte-tenu d'une évolution irréversible de l'endommagement $\dot{d} \geq 0$ et d'une dissipation d'énergie uniquement via l'énergie de fissuration, conduit alors aux

équations de l'élasto-dynamique pour un tenseur des contraintes dépendant du niveau d'endommagement $\underline{\underline{\sigma}} = \partial_{\underline{\underline{\varepsilon}}}\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d)$ ainsi qu'à un principe de minimum de l'énergie totale vis-à-vis d'une évolution admissible de l'endommagement par rapport à un état de référence i.e. vérifiant $d \in [0;1]$ et $\dot{d} \geq 0$.

2.2 Aspects numériques

D'un point de vue numérique, les champs $\underline{u}$ et d sont discrétisés par éléments finis avec une interpolation linéaire. Le problème d'évolution est résolu en découplant le problème d'élasto-dynamique et le problème d'évolution de l'endommagement. Le problème élasto-dynamique est résolu par un schéma d'intégration temporelle explicite à endommagement fixé tandis que le problème d'endommagement à $\underline{u}$ fixé revient à minimiser une fonctionnelle quadratique sous des contraintes bornant la variable d'endommagement (typiquement $d_n \leq d_{n+1} \leq 1$ pour l'incrément $n+1$).

Le problème aux éléments finis est formulé à l'aide de la librairie open-source FEniCS [5], l'étape de minimisation de l'endommagement s'effectue à l'aide du solveur TAO intégré à la librairie PETSc [6].

3 Propagation en milieu homogène

3.1 Transition fissure simple/branchement et épaisseur de la bande d'endommagement

Dans un travail récent [1], nous avons étudié la propagation dynamique d'une fissure en mode I dans un milieu homogène 2D de type fragile (propriétés proches du PMMA). La géométrie retenue est celle d'une plaque rectangulaire précontrainte (déplacements verticaux imposés sur les faces supérieures et inférieures) comportant une entaille à partir de laquelle une fissure se propage horizontalement, les déplacements restant fixés lors de la propagation (Figure 2-gauche).

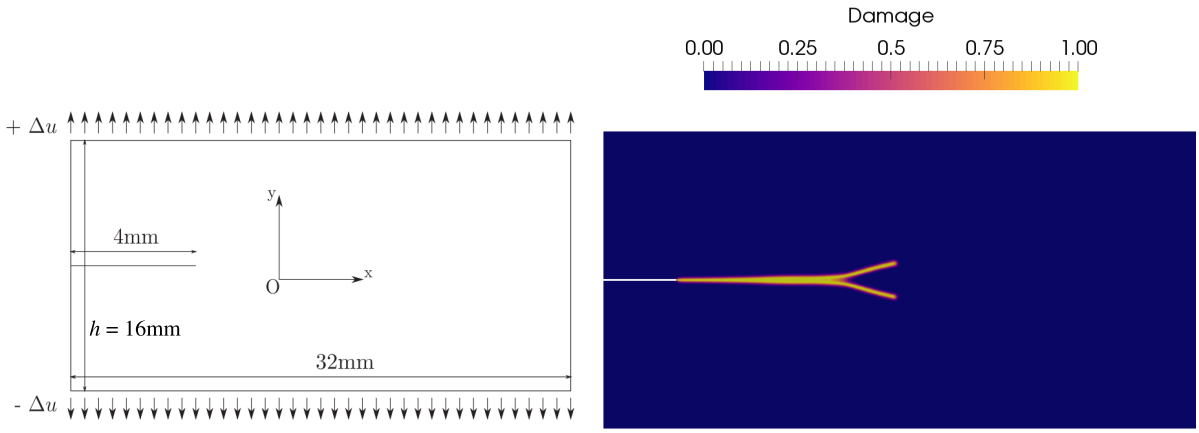


FIGURE 2 – Géométrie de plaque précontrainte (gauche) et branchement de fissure après épaississement de la bande endommagée (droite).

La simulation de ce problème à l'aide du modèle à gradient d'endommagement a permis de mettre en lumière plusieurs caractéristiques de la propagation dynamique d'une fissure en milieu homogène (Figure 2-droite) :

- la fissure se propage en ligne droite en accélérant jusqu'à atteindre une vitesse proche de $0.7c_R$ (c_R : vitesse des ondes de Rayleigh) ;
- à faible vitesse, le profil d'endommagement est similaire au cas statique et à la solution 1D localisée ;
- lorsque la vitesse augmente, une zone où $d = 1$ se développe au centre et s'épaissit lors de la propagation ;
- cet épaississement se traduit par une augmentation progressive de l'énergie de fracture apparente Γ, mesurée comme la dérivée de l'énergie dissipée par rapport à l'avancée de la fissure. À faible vitesse, $\Gamma \approx G_c$;

— la fissure se sépare en deux branches macroscopiques pour des niveaux de chargement suffisamment élevés. Les résultats suggèrent que le branchement se produit lorsque Γ dépasse une valeur critique de l'ordre de $2G_c$;
— avant branchement, une relation bien définie existe entre Γ et la vitesse de la fissure : $\Gamma(v)$ est une fonction croissante de v présentant une forte augmentation à l'approche de la vitesse limite $0.7c_R$.

3.2 Nature du lien entre vitesse limite et branchement

L'existence d'une vitesse limite inférieure à c_R et associée au phénomène de branchement est en accord avec des résultats expérimentaux bien connus [7]. D'autres expériences [8] ont également montré que la vitesse de Rayleigh c_R peut être atteinte si la fissure est contrainte à se propager le long d'une interface faible. De même, si l'on considère un milieu homogène perforé d'une série de trous alignés le long du plan de propagation, la fissure aura tendance à rester le long de ce plan de faiblesse plutôt que de former deux branches macroscopiques s'éloignant de ce plan. Dans ce cas, les résultats expérimentaux ont aussi montré que des vitesses proches de c_R pouvaient être atteintes. La simulation de ces deux situations (interface faible et milieu homogène perforé) conduit aux mêmes conclusions : le branchement est complètement empêché dans le premier cas et la fissure atteint c_R, dans le deuxième cas (voir Figure 3), le branchement est retardé, on observe des micro-branches stoppées par la présence du trou suivant qui force la fissure à se propager le long du plan moyen. Des vitesses de l'ordre de $0.9c_R$ ont été atteintes dans ce cas.

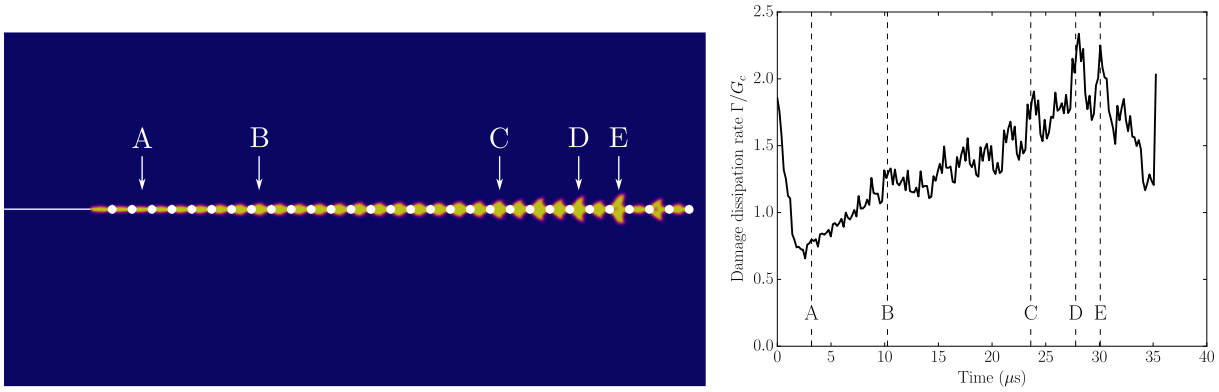


FIGURE 3 – Propagation dans un milieu perforé (gauche) et évolution de Γ lors de la propagation.

4 Propagation en milieu hétérogène

4.1 Hétérogénéité d'énergie de fracture et critère énergétique de branchement

Reprenant la même géométrie qu'en Figure 2, nous avons considéré le cas d'une fissure se propageant dans un milieu d'énergie de fracture $G_c^1 = G_c$ pour $x < x_0$ et $G_c^2 = \eta G_c$ pour $x > x_0$ avec $x_0 = 8$ mm par rapport au bord gauche du domaine et $\eta \leq 1$. Les autres propriétés mécaniques restent identiques dans les deux régions, l'hétérogénéité ne porte donc que sur G_c. Nous cherchons ici à savoir comment se comporte la fissure à la traversée vers le matériau de plus faible G_c.

L'évolution de la vitesse de propagation de la fissure est représentée sur la Figure 4-gauche. On observe une accélération de la pointe de fissure à la traversée de l'interface puis une vitesse de propagation très proche du cas homogène. L'accélération à la traversée de l'interface est d'autant plus forte que le contraste est important. Notons que le fait que la vitesse augmente avant que la fissure n'atteigne l'interface (symbolisée par la ligne verticale pointillée) est uniquement un artefact dû au calcul de la vitesse à l'instant t par régression linéaire de la position de la pointe de fissure sur un intervalle $[t-\Delta t; t+\Delta t]$.

Sur la Figure 4-centre, l'évolution du taux d'accroissement de surface endommagée $S = \Gamma/G_c(x)$ a été représenté en traits pleins, on observe une forte augmentation de S à la traversée de l'interface

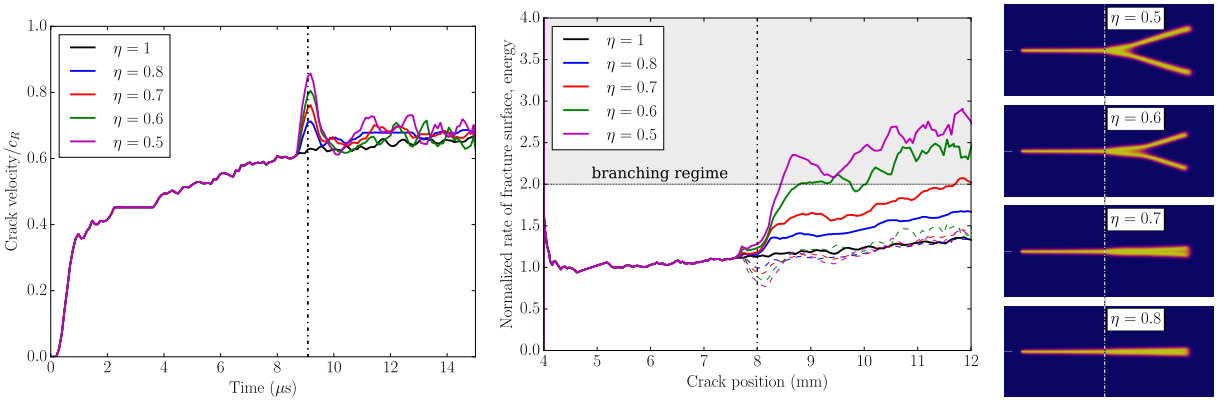


FIGURE 4 – Propagation à travers un bi-matériau (la ligne pointillée représente l'interface $x = x_0$). Gauche : évolution de la vitesse de la fissure en fonction du temps. Centre : évolution du taux d'accroissement de surface d'endommagée (traits pleins) et du taux d'énergie dissipée (traits pointillés) en fonction de l'avancée de la fissure (ces quantités sont normalisées par rapport à G_c^1). Droite : trajets de fissuration pour différents contrastes η.

$x_0 = 8$ mm. Notons que les résultats en milieu homogène avaient permis de supposer un critère de la forme $\Gamma \geq 2G_c$ pour le branchement d'une fissure que l'on peut généraliser ici à $S = \Gamma/G_c(x) \geq 2$. On constate effectivement sur la Figure 4-droite que le branchement se produit juste après la traversée de l'interface dans les cas de fort contraste $\eta = 0.5$ et $\eta = 0.6$ pour lesquels $S > 2$ après la traversée. Pour le cas $\eta = 0.7$, S ne dépasse 2 que lorsque la pointe de fissure dépasse 12 mm, entre-temps l'épaisseur de la bande complètement endommagée a fortement augmenté à la traversée de l'interface et on observe effectivement un début de branchement à la fin de la propagation. Pour le cas $\eta = 0.8$, le contraste n'est pas suffisant pour permettre à la fissure de brancher, on constate uniquement un épaississement plus important de la bande endommagée.
Remarquons également que si l'on trace l'évolution du taux d'énergie dissipée Γ (Figure 4-centre en traits pointillés), on constate que, dans le milieu 2 ($\Gamma = \eta S G_c^1$ dans ce cas), l'évolution de Γ est très proche du cas homogène quel que soit le contraste η. En conclusion, la propagation dans le milieu 2 se fait à un taux d'énergie dissipée semblable au cas homogène, en revanche la surface de fissure produite augmente en proportion de $1/\eta$ du fait d'une plus faible énergie de fracture et peut conduire à un branchement de la fissure pour des contrastes importants. L'énergie dissipée est donc bien reliée à l'énergie élastique disponible en pointe de fissure et plus l'énergie de fracture est faible, plus la surface endommagée sera importante pour la même énergie devant être dissipée.

4.2 Propagation à travers un arrangement périodique d'inclusions

On étudie ici l'interaction d'une fissure avec un réseau périodique d'inclusions disposées de part et d'autre du plan moyen de propagation. Plus précisément, on considère une alternance d'inclusions rigides/souples ($E = 3E_0$ pour les inclusions rigides et $E = E_0/3$ pour les inclusions souples avec E_0 le module de la matrice) circulaires de rayon $R = 0.4$ mm, dont les centres sont espacés de 1 mm et situés à une distance variable $e = 0.7$ ou 0.9 mm au-dessus du plan moyen de propagation de la fissure. On considère la même distribution en-dessous du plan moyen mais en inversant le rôle des inclusions rigides/souples (Figure 5-gauche).

On constate alors que le fissure se propage en oscillant dans la direction verticale sous l'effet combiné de l'attraction des inclusions souples et de la répulsion des inclusions rigides. Cette oscillation a pour effet de ralentir la fissure en moyenne et d'autant plus que les inclusions sont proches. On constate également que l'amplitude des oscillations augmente avec l'augmentation de la vitesse moyenne. Du point de vue de l'énergie dissipée (Figure 5-droite), celle-ci est plus faible en moyenne que dans le cas homogène car une partie plus importante de l'énergie disponible est utilisée sous forme d'énergie cinétique lors des phases d'accélération/décélération de la fissure lorsque celle-ci change de direction. Néanmoins, lorsque l'on reporte le lien entre la vitesse moyenne de la fissure et le taux apparent d'énergie dissipée Γ, on observe que ce mécanisme conduit à une valeur de Γ plus élevée que dans le cas homogène pour une même

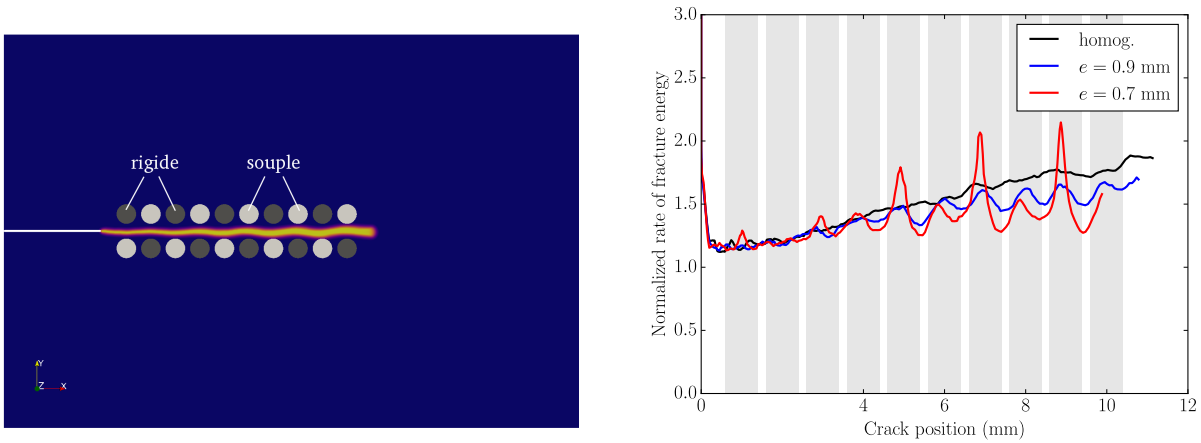


FIGURE 5 – Propagation à travers un arrangement périodique d'inclusions souples/rigides. Gauche : trajet de fissuration ($e = 0.9$ mm). Droite : évolution de Γ en fonction de l'avancée de fissure (la position des inclusions est symbolisée par les bandes grises).

vitesse. On obtient ainsi une augmentation de la ténacité apparente (de l'ordre de 10%) de ce matériau composite.

4.3 Propagation à travers un milieu aléatoire de type matrice-inclusions

On considère ici le cas d'un milieu hétérogène constitué d'une matrice de propriétés E_1, G_c^1 et d'un ensemble d'inclusions circulaires de rayon R et de propriétés $E_2 = 3E_1$, $G_c^2 = 3G_c^1$. Les inclusions sont disposées de manière aléatoire et la fraction volumique est fixée à environ 40% quel que soit le rayon R. Notons que l'interface matrice-inclusion est supposée parfaite. La géométrie et le type de chargement restent indentiques aux cas précédents.

À faible niveau de chargement ($\Delta U = 0.04$ mm), on constate que la fissure s'arrête très rapidement dans le cas d'inclusions de rayon important ($R = 0.5$ mm). En particulier, celle-ci stoppe sa propagation lorsqu'elle rencontre une inclusion dont le centre est proche de sa direction de propagation. Si le centre en est plus éloigné, la fissure est capable de contourner l'inclusion mais finira par en recontrer une autre suffisamment proche de son chemin de propagation pour la stopper. Dans le cas d'inclusions de petite taille ($R = 0.1$ mm), l'énergie nécessaire au contournement d'une inclusion est plus faible de sorte que l'on observe en général une propagation dans la phase matrice contournant les inclusions. On observe également quelques évènements de branchement mais les branches secondaires sont en général très vite arrêtées. D'un point de vue macroscopique, la fissure principale présente donc une tortuosité qui augmente sa ténacité apparente par rapport à une propagation en ligne droite.

À niveau de chargement plus élevé ($\Delta U = 0.06$ mm), les effets dynamiques sont plus importants, le branchement de la fissure est plus facile du fait d'une énergie disponible plus importante. Dans ce cas, on observe une propagation de la fissure à travers le milieu hétérogène quelle que soit la taille des inclusions (Figure 6). Lorsqu'une fissure rencontre une inclusion de grande taille située sur son trajet de propagation, on observe régulièrement un branchement de la fissure avant que celle-ci n'atteigne l'inclusion, cela lui permet de la contourner plus facilement. Dans le cas d'inclusions de petite taille, on observe à nouveau une tortuosité à petite échelle mais les évènements de branchement sont à présents plus importants et il existe plusieurs fissures macroscopiques. D'un point de vue quantitatif, l'énergie dissipée reste, en moyenne, très proche quelle que soit la taille des inclusions. Cette similarité peut s'expliquer par la compétition entre les deux mécanismes de dissipation d'énergie, soit via le branchement macroscopique soit via la tortuosité due au contournement des inclusions. Si dans le cas de faible chargement ce dernier mécanisme demandait beaucoup plus d'énergie pour les inclusions de grande taille, dans le cas de chargement élevé la possibilité de brancher permet à la fissure de continuer sa propagation. L'effet de la taille des inclusions semble donc moins important à haute vitesse de propagation qu'à basse vitesse.

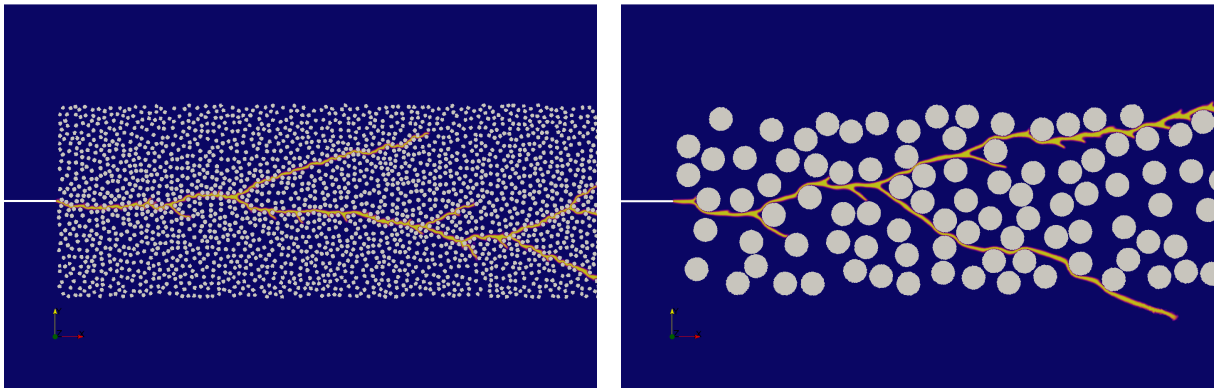


FIGURE 6 – Propagation à travers un réseau matrice-inclusions à niveau de chargement élevé ($\Delta U = 0.06$ mm) : inclusions de rayon $R = 0.1$ mm (gauche) et $R = 0.5$ mm (droite)

5 Conclusions et perspectives

L'approche par gradient d'endommagement permet de simuler efficacement la propagation de fissures dans un matériau fragile et permet de reproduire certaines caractéristiques de la mécanique de la rupture dynamique telles que le branchement de fissures, l'existence d'une vitesse limite ou encore l'augmentation de la ténacité effective avec la vitesse de la fissure. Il semble également que l'apparition du branchement se produit lorsque Γ dépasse la valeur critique de $2G_c$ et suggère donc l'existence d'un critère énergétique de branchement associé à ce modèle.

Ces résultats ont été confirmés en étudiant la propagation d'une fissure à la traversée d'une interface vers un milieu de plus faible G_c. On observe un branchement après l'interface pour des contrastes d'énergie de fracture suffisamment importants par rapport à la valeur de Γ juste avant d'atteindre l'interface, en accord avec le critère énergétique.

D'autre part, l'étude de la propagation d'une fissure dans différentes configurations de milieu hétérogène montre que la ténacité apparente du milieu dépend fortement de la façon dont la fissure intéragit avec les hétérogénéités. Il reste néanmoins très difficile de tirer des conclusions générales dans la mesure où une fissure se propageant à haute vitesse dispose de plusieurs moyens d'adapter le niveau d'énergie dissipée en fonction du milieu qu'elle traverse : ralentissement/accélération, tortuosité du chemin de fissure, épaississement de la zone endommagée voire branchement.

D'un point de vue numérique, ce type de simulations reste relativement coûteux puisque la taille des éléments h doit être suffisamment petite devant la longueur interne (en pratique $h \leq 4l_0$). Néanmoins, la représentation des hétérogénéités (surtout lorsqu'elles sont nombreuses et de petite taille, cf. section 4.3) nécessite, quoi qu'il en soit, des maillages très fins. À titre d'illustration, les calculs de la section 4.3 ont été réalisés en parallèle sur 16 cœurs et ont nécessité de l'ordre de 5 à 10h pour environ 30,000 pas de temps. Le passage au 3D reste possible mais sur des durées de simulations plus courtes et sur des maillages moins fins que ceux utilisés en 2D, en particulier si le trajet n'est pas connu a priori, empêchant de mailler finement uniquement dans la zone de propagation de la fissure. L'extension 3D de simulations telles que celles présentées en section 4.3 semble donc, à l'heure actuelle, encore hors de portée.

Références

[1] J. Bleyer, C. Roux-Langlois, J.F. Molinari. *Dynamic crack propagation with a variational phase-field model : limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms*, International Journal of Fracture, Springer, **204**(1), pp. 79–100, 2017.

[2] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, **48**(4), 797–826, 2000.

[3] G.A. Francfort, J.J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, **46**(8), 1319–1342, 1998.

[4] T. Li, J.J. Marigo, D. Guilbaud, D. Potapov. *Gradient damage modeling of brittle fracture in an explicit dynamics context*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, in press, 2016.

[5] A. Logg, K.A. Mardal, G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method : The FEniCS book*, vol 84. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] PETSc Web page, http ://www.mcs.anl.gov/petsc, 2016.

[7] E. Sharon, S.P. Gross, J. Fineberg, *Energy dissipation in dynamic fracture*, Physical Review Letters, APS Physics, 76(12) 2117, 1996

[8] P.D. Washabaugh, W. Knauss, *A reconciliation of dynamic crack velocity and Rayleigh wave speed in isotropic brittle solids*, International Journal of Fracture, 65(2), pp. 97-114, 1994