Conditions aux limites mixtes normales

L. Gelebart, Camille Chateau, Michel Bornert

Conditions aux limites mixtes normales

L.GELEBART[a], C. CHATEAU[a,b], M.BORNERT[b,c],

a. CEA Saclay, Service de Recherche Métallurgiques Appliquées (SRMA), 91191 Gif/Yvette
b. Ecole Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS), 91128 Palaiseau Cedex
b. Unité de Recherche Navier, Ecole des Ponts, Paristech , Université Paris Est, 6-8 avenue Blaise Pascal, Champs sur Marne 77455 Marne-la-Vallée cedex

Résumé:

L'étape de détermination du comportement "apparent" d'un milieu hétérogène à partir d'un volume élémentaire de taille inférieure à la taille d'un Volume Elémentaire Représentatif (VER) est sensible aux choix des conditions aux limites (CL). Les CL utilisées usuellement sont les CL en contrainte ou en déformation homogène au contour ainsi que les CL périodiques. Nous proposons ici d'autres CL (dites "mixtes normales") permettant de fournir de nouvelles estimations alternatives à celle obtenue avec des CL périodiques. On notera que ces nouvelles CL sont moins restrictives que les CL mixtes existantes ou même que les CL périodiques qui sont limitées à des volumes de géométrie parallélépipédique et qui nécessitent bien souvent une étape de "périodisation" de la microstructure (la microstructure est modifiée de manière arbitraire afin de la rendre périodique).

Abstract :

When determining the "apparent" behaviour of an heterogeneous volume element with a size lower than the size of the Representative Volume Element (RVE), the effect of the choice of the boundary conditions (BC) can be important. Uniform stress, uniform strain, and periodic BC are classically used. In this paper, new sets of BC are proposed (called "Normal Mixed" BC) to provide new estimates alternative to the one obtained with periodic BC. Moreover, the use of Normal Mixed BC is less restrictive than the use of existing mixed BC and also than the use of periodic BC (which are restricted to volume elements with a parallelepiped shape and which are often used with "periodized" microstructures within the volume element (the microstructure is arbitrarily modified to be periodic)).

Mots clefs : Homogénéisation, conditions aux limites, comportement apparent

1 Introduction

Les techniques d'homogénéisation du comportement mécanique des matériaux, initiées dans les années 50 et largement développées depuis, consistent à déduire le comportement mécanique "effectif" d'un matériau à partir de la connaissance du comportement de ses différents constituants ainsi que de leur distribution spatiale. Ces techniques s'appuient généralement sur l'existence d'un Volume Elémentaire Représentatif (VER) défini comme un volume "suffisamment" petit devant les dimensions de la structure considérée et "suffisamment" grand devant la dimension caractéristique des hétérogénéités microstructurales présentes dans le matériau. Le comportement "effectif" du matériau est alors donné par la réponse moyenne évaluée sur le VER soumis à un chargement "moyen" vérifiant certaines conditions aux limites (CL), les plus usuelles étant les CL en contrainte homogène, en déformation homogène et les CL périodiques. Le comportement "apparent" [1] correspond au comportement moyen si la taille du volume élémentaire (VE) considéré est inférieure à la taille du VER. La détermination de comportement "apparent" peut être nécessaire pour fournir une estimation du comportement "effectif" en effectuant une moyenne statistique des comportements "apparents" obtenus pour un grand nombre de VE, ou encore si la condition de séparabilité des échelles nécessaire à la définition du VER n'est pas satisfaite et que par conséquent le comportement "effectif" ne peut être défini [1,2]. Contrairement au comportement "effectif", le comportement "apparent" dépend du choix des CL. On peut notamment montrer que le comportement "apparent" obtenu avec des CL en déformation homogène est toujours plus "raide" que celui obtenu avec des CL en contrainte homogène [1].

Les CL périodiques permettent de proposer une troisième estimation de ce comportement "apparent", en revanche, celles-ci n'ont pas un caractère aussi général que les CL en contrainte ou déformation homogène: le contour du VE considéré doit respecter les conditions de périodicité (en général il s'agit de volumes parallélépipédiques). De plus, la mise en œuvre des CL périodiques dans un code par éléments finis nécessite, pour des raisons pratiques, un maillage périodique qui conduit dans bien des cas à "périodiser", donc à modifier de manière artificielle, la microstructure du VE. On se propose ici de présenter de nouvelles CL permettant de fournir une alternative à l'utilisation des CL périodiques : les CL mixtes normales. Celles-ci présentent notamment l'avantage d'être utilisables indépendamment de la géométrie du VE et ne nécessitent en aucun cas la périodisation de la microstructure du VE.

On rappelle dans un premier temps les différentes approches permettant de déduire le comportement "apparent" d'un VE à partir de 6 chargements indépendants. On redéfinit par la suite la notion de chargement associé à un "jeu de conditions aux limites" ainsi que les propriétés associées à la définition de ce jeu de CL. On montre par la suite que les CL mixtes proposées jusqu'ici ne respectent pas ces propriétés puis on définit deux jeux de CL mixtes normales qui satisfont ces propriétés. Enfin, on détaille comment, en pratique, les CL mixtes normales sont introduites au sein d'un code standard de calcul par éléments-finis (ici CAST3M).

2 Définitions du comportement "apparent" d'un volume élémentaire (VE)

Notations :

$\underline{x}$, $\underline{\underline{X}}$, K, désignent respectivement un vecteur (ou tenseur d'ordre un), un tenseur d'ordre 2 et un tenseur d'ordre 4. $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{u}$ et $\underline{t}$ désignent les tenseurs de contraintes, de déformation, le vecteur déplacement et le vecteur contrainte (défini sur le contour du VE). Ω et $\partial\Omega$ désignent respectivement le VE considéré et son contour. $\overline{x}$ désigne la moyenne spatiale de la quantité x sur le VE considéré. Les produits contractés, doublement contractés, tensoriels et tensoriels symétriques sont donnés par les notations classiques ($.$, $:$, $\otimes$ et $\otimes^s$) [3].

Deux approches peuvent être utilisées pour définir le tenseur d'élasticité "apparent" d'un volume élémentaire: l'approche "mécanique" et l'approche "énergétique".

Dans l'approche "mécanique", le tenseur d'élasticité "apparent" peut être défini comme le tenseur du quatrième ordre reliant la contrainte moyenne et la déformation moyenne évaluées à partir d'un chargement (équation 1). Six chargements linéairement indépendants sont donc nécessaires pour déterminer les 36 coefficients du tenseur. Des chargements sont linéairement indépendants s'il n'existe pas de relation linéaire entre les différentes contraintes (ou déformations) moyennes.

$$\overline{\underline{\underline{\sigma}}^I} = \tilde{K}^{mech} : \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}^I} \qquad I = 1..6 \qquad (1)$$

Dans l'approche "énergétique", le tenseur d'élasticité "apparent" est défini comme le tenseur du quatrième ordre reliant l'énergie libre moyenne évaluée à partir de deux chargements aux deux déformations moyennes correspondantes (équation 2). De même que précédemment, six chargements linéairement indépendants permettent de déterminer les 36 coefficients du tenseur.

$$\overline{e^{IJ}} = \overline{\underline{\underline{\sigma}}^I : \underline{\underline{\varepsilon}}^J} = \frac{1}{2}\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}^I} : \tilde{K}^{ener} : \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}^J} \qquad I = 1..6; J = 1..6 \qquad (2)$$

Sans condition supplémentaire sur le choix des chargements, ces deux approches fournissent des résultats différents. On remarquera notamment que le tenseur évalué à partir de l'approche énergétique est symétrique (de par la symétrie des tenseur de rigidité des constituants locaux), alors que le tenseur évalué par l'approche "mécanique" ne l'est pas forcément. Dans le paragraphe suivant, nous préciserons la notion de chargement associé à un "jeu de conditions aux limites" puis on rappellera la condition nécessaire pour assurer l'équivalence entre ces deux approches.

3 Conditions sur les "jeux de conditions aux limites"

3.1 Définition d'un "chargement" associé à un "jeu de conditions aux limites"

Un chargement est défini par un ensemble de conditions sur les champs de déplacement et de vecteur contrainte sur la surface du VE permettant d'assurer l'existence et l'unicité du problème d'élasticité. On sépare ici ces conditions en une condition associée au chargement moyen et une condition associée à un "jeu de conditions aux limites". La condition sur le chargement moyen peut être définie sur la contrainte moyenne (équation 3), ou sur la déformation moyenne (équation 4), ou pourrait encore être définie sur la contrainte moyenne pour certaines composantes et sur la déformation moyenne pour les autres composantes. L'appartenance à un "jeu de conditions aux limites" permet de préciser la nature des CL utilisées indépendamment du chargement moyen appliqué. Les jeux de conditions aux limites utilisés classiquement, les CL en contrainte homogène, en déformation homogène et les CL périodiques, sont définis respectivement par les équations 5, 6 et 7 ($\underline{h}$ étant un vecteur de périodicité permettant de relier deux points opposés du VE)

$$E_{\Sigma_0} = \left\{ (\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \Big/ \overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\Sigma}}_0 \left(avec \;\; \overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \underline{t} \otimes^s \underline{x} ds \right) \right\} \tag{3}$$

$$E_{E_0} = \left\{ (\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \Big/ \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{E}}_0 \left(avec \;\; \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes^s \underline{n} ds \right) \right\} \tag{4}$$

$$E^{CH} = \left\{ (\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \Big/ \underline{t} = \overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n} \left(avec \;\; \overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \underline{t} \otimes^s \underline{x} ds \right) \right\} \tag{5}$$

$$E^{DH} = \left\{ (\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \Big/ \underline{u} = \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\underline{x} \left(avec \;\; \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes^s \underline{n} ds \right) \right\} \tag{6}$$

$$E^{P} = \left\{ (\underline{u},\underline{\underline{\sigma}})_{\partial\Omega} \Big/ \underline{u}(\underline{x}+\underline{h}) = \underline{u}(\underline{x}) + \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\underline{h} \quad et \quad \underline{t}(\underline{x}+\underline{h}) = -\underline{t}(\underline{x}) \left(avec \;\; \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes^s \underline{n} ds \right) \right\} \tag{7}$$

Ainsi, pour un chargement donné, le problème d'élasticité consiste à déterminer $\underline{u}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ "suffisamment réguliers" tels que :

$$div(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \tag{8}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = K : \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{9}$$

$$(\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \in E_{X_0} \tag{10}$$

$$(\underline{u},\underline{t})_{\partial\Omega} \in E^{CL} \tag{11}$$

Lla condition du choix de 6 chargements linéairement indépendants (voir paragraphe 2) porte donc sur le choix de 6 chargements moyens définis par l'équation 10, indépendamment du choix des CL utilisées défini à l'équation 11.

3.2 Condition de stabilité du "jeu de conditions aux limites"

La définition du "jeu de condition aux limites" doit vérifier une condition de stabilité par combinaison linéaire ($\forall (C_1,C_2) \in (E)^2, \forall(\alpha,\beta) \in \Re^2, (\alpha C_1 + \beta C_2) \in E$). En effet, cette condition est suffisante pour assurer que tout 6-uplet de chargements linéairement indépendants (voir définition paragraphe 2) appartenant à un même jeu de conditions aux limites conduit à la même évaluation du tenseur d'élasticité "apparent".

On peut vérifier aisément que cette propriété de stabilité par combinaison linéaire est vérifiée pour les jeux de CL en contrainte homogène, déformation homogène, et périodique (par exemple, une combinaison linéaire de deux chargements périodiques est un chargement périodique; il en est de même pour les deux autres jeux de CL).

3.3 Condition de Hill

Afin d'assurer l'équivalence entre les approches "mécanique" et "énergétique" telles que définies au paragraphe 2, la définition d'un "jeu de conditions aux limites" doit satisfaire la condition de macro-homogénéité (ou condition de Hill) selon laquelle la moyenne du travail défini à partir des contraintes et déformations locales est égale au travail défini à partir des contraintes et déformations moyennes (*i.e.* moyenne du travail microscopique = travail macroscopique) (équation 9). Cette condition en volume peut être exprimée par une condition sur le contour du VE (équation 10)[4] mettant ainsi en évidence que cette condition est bien associée à la définition des conditions aux limites.

$$\frac{1}{2}\overline{\underline{\underline{\sigma}}}:\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\frac{1}{2}\overline{\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{9}$$

$$\int_{\partial\Omega}\left(\underline{t}-\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n}\right)\cdot\left(\underline{u}-\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\underline{x}\right)dS=0 \tag{10}$$

La condition de Hill peut notamment être démontrée pour les jeux de conditions aux limites usuels (déformation homogène, contrainte homogène et périodique)[3].

4 Conditions aux limites mixtes

4.1 Les conditions aux limites mixtes existantes

Les conditions aux limites mixtes consistent à imposer en tout point du contour du VE certaines composantes du vecteur contrainte et les autres composantes du vecteur déplacement.

Les principales conditions aux limites mixtes sont celles proposées par Hazanov [4] sous le terme "conditions aux limites mixtes orthogonales uniformes" ("orthogonal mixed uniform boundary conditions" [4]). Il s'agit d'imposer en tout point du contour le vecteur contrainte dans une direction macroscopique et les déplacements dans les deux autres directions orthogonales (ou inversement le déplacement dans une direction macroscopique et le vecteur contrainte dans les deux autres directions). Il y a donc 6 différents cas de CL mixtes orthogonales uniformes. Ce type de CL peut se mettre sous la forme d'un "jeu de conditions aux limites" (tel que présenté au paragraphe 3.1) (équation 11) et on peut vérifier que cet ensemble est bien stable par combinaison linéaire. En revanche, sans condition restrictive supplémentaire sur le chargement et sur la microstructure, ces chargements ne vérifient pas la condition de Hill [4]. Pour être satisfaite, le VE doit satisfaire une condition de symétrie "orthotrope", et le chargement moyen doit être "orthogonal" (ne pas faire intervenir de cisaillement).

$$E^{MOU}=\left\{(\underline{u},\underline{\underline{\sigma}})_{\partial\Omega}\;\Big/\;\begin{Bmatrix} t_1(\underline{x})=(\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n})_1\\ u_2(\underline{x})=(\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\underline{x})_2\\ u_3(\underline{x})=(\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\underline{x})_3\end{Bmatrix}_{\partial\Omega}\quad\left(avec\;\;\overline{\underline{\underline{\sigma}}}=\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega}\underline{t}\otimes^s\underline{x}ds\quad et\quad\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\frac{1}{V}\int_{\partial\Omega}\underline{u}\otimes^s\underline{n}ds\right)\right\} \tag{11}$$

Des conditions aux limites mixtes ont également été utilisées plus récemment par Pahr [5] afin de déterminer le tenseur d'élasticité "apparent" de certaines microstructures. En réalité, le tenseur d'élasticité "apparent" est évalué à partir de 6 chargements distincts mais il est impossible de définir un "jeu" de conditions aux limites stable par combinaison linéaire dont ces six chargements seraient des représentants. De plus, sans restriction sur les symétries internes du VE, le tenseur "apparent" n'est pas symétrique (par l'approche "mécanique"), on en déduit donc que la condition de Hill n'est pas satisfaite. Ainsi, les conditions aux limites mixtes actuellement disponibles ne satisfont en général pas les conditions proposées au paragraphe 3 notamment en ce qui concerne la condition de Hill.

4.2 Les conditions aux limites mixtes normales

4.2.1 Définition

Les conditions aux limites mixtes normales de type 1 consistent à imposer une condition d'homogénéité des composantes tangentielles (par rapport à la surface) du vecteur contrainte et de la composante normale du vecteur déplacement, les composantes tangentielles du vecteur contrainte étant associées à la valeur de la contrainte moyenne (équation 12, l'indice N désignant la projection d'un vecteur sur la normale à la surface, l'indice T désignant la projection d'un vecteur dans le plan tangent à la surface, S désignant l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques). En inversant les conditions entre composantes normales et tangentielles, on obtient le jeu de conditions aux limites mixtes normales de type 2 (équation 13). On notera que le tenseur $\underline{\underline{X}}$ introduit ici n'est pas forcément égal à la déformation moyenne, on impose juste son existence.

$$E^{MN1} = \left\{ (\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})_{\partial\Omega} \Big/ \exists \underline{\underline{X}} \in S \quad t.q. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{t}_T = (\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n})_T \\ \underline{u}_N = (\underline{\underline{X}}.\underline{x})_N \end{array} \right\}_{\partial\Omega} \quad \left(avec \quad \overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{t} \otimes^s \underline{x} ds \right) \right\} \tag{12}$$

$$E^{MN2} = \left\{ (\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})_{\partial\Omega} \Big/ \exists \underline{\underline{X}} \in S \quad t.q. \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{t}_N = (\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n})_N \\ \underline{u}_T = (\underline{\underline{X}}.\underline{x})_T \end{array} \right\}_{\partial\Omega} \quad \left(avec \quad \overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{t} \otimes^s \underline{x} ds \right) \right\} \tag{13}$$

Ces deux "jeux" de conditions aux limites vérifient bien la condition de stabilité par combinaison linéaire présentée au paragraphe 3.2.

4.2.2 Validation de la condition de Hill

On étudie ici la validité de la condition de Hill pour les CL mixtes normales de type 1 (équation 12), la démonstration étant en tout point semblable pour les CL de type 2.

Tout champ de vecteur contrainte satisfaisant les conditions de type 1 (équation 12), peut s'écrire comme la somme d'un champ de vecteur contrainte homogène associé à la contrainte moyenne, et d'un champ de vecteur "fluctuations" porté par la normale (équation 14). A partir de l'équation 14, on montre que $\int_{\partial\Omega} \tilde{t}\, \underline{n} \otimes^s \underline{x} ds = \underline{\underline{0}}$ (équation 15).

$$\underline{t} = \overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n} + \tilde{t}\, \underline{n} \tag{14}$$

$$\overline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{t} \otimes^s \underline{x} ds = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} (\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n} + \tilde{t}\, \underline{n}) \otimes^s \underline{x} ds = \overline{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \tilde{t}\, \underline{n} \otimes^s \underline{x} ds \Leftrightarrow \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \tilde{t}\, \underline{n} \otimes^s \underline{x} ds = \underline{\underline{0}} \tag{15}$$

Par ailleurs, le champ de déplacement satisfaisant les conditions de type 1 (équation 12), peut être décomposé entre partie normale et tangentielle selon l'équation (16).

$$\underline{u} = \underline{u}_T + (\underline{n}.\underline{\underline{X}}.\underline{x}).\underline{n} \tag{16}$$

Enfin, la moyenne du travail local peut s'exprimer à partir des vecteurs contrainte et déplacement sur le bord. Après décomposition sur les composantes normale et tangentielle, utilisation de la condition cinématique (équation 16) et de l'équation 15, on montre que le travail local moyen est égal au travail des contraintes et déformation moyennes : la condition de Hill est donc satisfaite (équation 17).

$$\overline{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{t}.\underline{u} ds = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} (\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n} + \tilde{t}\, \underline{n}).(\underline{u}_T + (\underline{n}.\underline{\underline{X}}.\underline{x}).\underline{n}) ds = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} (\overline{\underline{\underline{\sigma}}}.\underline{n}).\underline{u} + \tilde{t}\, (\underline{n}.\underline{\underline{X}}.\underline{x}) ds \tag{17}$$

$$\overline{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{V} \overline{\underline{\underline{\sigma}}} : \int_{\partial\Omega} \underline{u} \otimes^s \underline{n} ds + \frac{1}{V} \underline{\underline{X}} : \int_{\partial\Omega} \tilde{t}\, \underline{n} \otimes^s \underline{x} ds = \overline{\underline{\underline{\sigma}}} : \overline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \tag{18}$$

4.2.3 Mise en œuvre numérique des conditions au limites mixtes normales

Les chargements respectant les CL mixtes normales de type 1 et 2 ont été mis en place dans un code standard de calcul par éléments-finis (CAST3M [6]). Les chargements mis en place ici correspondent à des chargements où la contrainte moyenne est imposée (équation 3). A nouveau, seul le cas des CL mixtes normales de type 1 est traité ci-dessous (le cas des CL mixtes normales de type 2 étant en tout point analogue en remplaçant la projection normale du déplacement par la projection tangentielle du déplacement dans l'équation 20).

Tout d'abord, les points $\underline{A}^1 = (x_1^{A^1},0,0)$, $\underline{A}^2 = (0,x_2^{A^2},0)$ et $\underline{A}^3 = (0,0,x_3^{A^3})$ sont utilisés pour bloquer le mouvement de corps rigide (équation 19). Les relations cinématiques permettant d'imposer une condition de déplacement normal homogène sont données à l'équation 20. On remarque ici que ces relations entre les points du contour ne font pas apparaitre la valeur du tenseur $\underline{\underline{X}}$ défini aux équations 12 et 13. Ces relations cinématiques sont traitées dans CAST3M par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange dans la formulation variationnelle du problème de mécanique. Ces multiplicateurs correspondent à un champ de réactions $r\underline{n}$. Les relations étant imposées sur la composante normale du déplacement (équation 20), $r\underline{n}$ est bien un champ de vecteur normal à la surface. La contrainte moyenne est ensuite imposée par un champ de contrainte uniforme en tout point du contour défini par le tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}^0$ (terme de droite de l'équation 21). Les réactions induites par les relations cinématiques sont soustraites au vecteur contrainte (terme de gauche de l'équation 21), cependant, la condition de vecteur contrainte tangentiel homogène reste valide. Enfin, la formulation variationelle de ce problème (non présentée ici) permet de montrer que la contrainte moyenne est bien égale au tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}^0$ et que le champ de réactions $r\underline{n}$ correspond au champ de fluctuations $\tilde{t}\,\underline{n}$ introduit précédemment (équation 14).

$$\underline{u}(\underline{0}) = \underline{0} \qquad \underline{u}(\underline{A}^1).\underline{x}^2 = \underline{u}(\underline{A}^1).\underline{x}^3 = 0 \qquad \underline{u}(\underline{A}^2).\underline{x}^3 = 0 \tag{19}$$

$$\underline{u}_N(\underline{x}) = \left(\frac{x_1}{x_1^{A^1}}\underline{u}(\underline{A}^1) + \frac{x_2}{x_2^{A^2}}\underline{u}(\underline{A}^2) + \frac{x_3}{x_3^{A^3}}\underline{u}(\underline{A}^3) \right)_N \qquad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \tag{20}$$

$$\underline{t}(\underline{x}) - r\underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}^0.\underline{n} \qquad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \tag{21}$$

Remarque : Une procédure analogue a également été développée au CEA/SRMA afin d'effectuer des calculs en déformation homogène avec un pilotage en contrainte moyenne, nécessaire par exemple pour traiter un essai de fluage [7] : il suffit alors d'étendre la relation cinématique sur la composante normale du déplacement (équation 20) à l'ensemble des composantes du déplacement.

5 Conclusion

Après avoir montré que les conditions aux limites mixtes proposées jusqu'ici n'avaient pas un caractère aussi général que les conditions aux limites en déformation ou contrainte homogène, on propose ici deux nouveaux jeux de conditions aux limites mixtes (dites "conditions aux limites mixtes normales" de type 1 ou 2) qui satisfont la condition de Hill sans restriction particulière sur le volume élémentaire considéré.

Références

[1] C.Huet, Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 38, 813-841 (1990)
[2] M. Ostoja-Starzewski, Material spatial randomness: from statistical to representative volume element, Probabilistic Engineering Mechanics, 21, 112-132 (2006)
[3] M.Bornert, T.Bretheau, P.Gilormini, Homogénéisation en Mécanique des Matériaux, Hermes, ISBN 2-7462-0199-2, (2001)
[4] S.Hazanov, M.Amieur, On overall properties of elastic heterogeneous bodies smaller than the representative volume, International Journal of Engineering Science, 33, 1289-1301 (1995)
[5] D.H.Pahr, P.K.Zysset, Influence of boundary conditions on computed apparent elastic properties of cancellous bone, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 7, 463-76 (2008)
[6] CAST3M, finite element code developed by CEA, http://www-cast3m.cea.fr
[7] G.Trégo, L.Gélébart, L.Portier, S.Forest, A.F.Gourues-Lorenzon, Simulation par éléments finis du comportement en fluage à haute température dans le domaine biphasé (α+β) de l'alliage M5TM, Congrès Français de Mécanique, 24-28 Aout 2009, Marseille