Modèle viscoélastique non-linéaire; le modèle pseudo-linéaire

Seddiq Hassani, Amina Alaoui, Alain Ehrlacher

▶ **To cite this version:**

Seddiq Hassani, Amina Alaoui, Alain Ehrlacher. Modèle viscoélastique non-linéaire; le modèle pseudo-linéaire. ESAIM: Proceedings, 1996, 1, pp.157-168. hal-00954239

HAL Id: hal-00954239
https://enpc.hal.science/hal-00954239

Submitted on 28 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODÈLE VISCOÉLASTIQUE NON-LINÉAIRE: LE MODÈLE PSEUDO-LINÉAIRE

SEDDIQ HASSANI, AMINA ALAOUI SOULIMANI ET ALAIN EHRLACHER

ABSTRACT. Un modèle viscoélastique non linéaire en grandes déformations est développé. Appelé modèle pseudo-linéaire, il propose de trouver une mesure de déformation convenable permettant d'écrire le potentiel viscoélastique sous forme quadratique. Pour valider ce modèle, nous avons comparé le potentiel pseudo-linéaire à un potentiel de Pipkin écrit sous forme d'un développement intégral au troisième ordre.

Mots-clés : Modélisation, viscoélasticité non linéaire, grandes déformations, élastomères, hyperélasticité, dissipation.

1. INTRODUCTION

Le comportement des élastomères, comme de tous les polymères dépend de la température. Ainsi, aux basses températures, il se caractérise par un état vitreux et aux hautes températures, par un état caoutchoutique. Entre ces deux états, a lieu la transition vitreuse où le comportement varie fortement avec la température, soit une forte variation du module d'Young. C'est cette température de transition vitreuse qui va déterminer la nature du comportement mécanique observé à température ambiante. Celui-ci se caractérise par de grandes déformations, de fortes non-linéarités, un important terme source dû à la dissipation visqueuse et une forte variation de température à cause de la faible conductivité thermique du matériau. Il était donc naturel, au cours de ce travail, de prendre en compte ces différents paramètres pour la modélisation du comportement viscoélastique et d'être en mesure de calculer la dissipation visqueuse au sein du matériau.
On se place dans le cadre classique de la mécanique des milieux continus, en formalisme lagrangien total. Les hypothèses de l'action locale et de la simplicité matérielle, conjuguées aux principes de causalité et d'objectivité nous permettent d'aboutir à la forme générale de la loi de comportement liant les contraintes aux déformations sous forme d'une fonctionnelle qui, dans le cas isotherme s'écrit :

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) \;=\; F\left[\begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ -\infty \end{array}\right] \qquad (1)$$

où le tenseur des contraintes est le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 :

$$\underline{\underline{\Pi}} \;=\; (Det(\underline{\underline{\mathbb{F}}}))\; \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1}\; \underline{\underline{\sigma}}\; \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-t}$$

avec :

Huitièmes Entretiens du Centre Jacques Cartier, *Élasticité, viscoélasticité et contrôle optimal*, Lyon, 6-8 décembre 1995.

Article published by EDP Sciences and available at http://www.edpsciences.org/proc or http://dx.doi.org/10.1051/proc:1997021

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} : \text{tenseur de contraintes de Cauchy} \\ \underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{grad}(\Phi) : \text{gradient de la transformation} \\ \underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) : \text{transformation de la matière} \end{cases}$$

et le tenseur de déformation, le tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbb{C}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}})$$

où $\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ représente le tenseur unité d'ordre 2.

$\underline{\underline{\Pi}}$ est le tenseur énergétiquement associé à $\underline{\underline{\Delta}}$, puisque la puissance de déformation est :

$$P_{Def} = \int_{S_r} \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\, d\underline{X} = \int_{S_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{D}}}\, d\underline{x} \tag{2}$$

où S_r est la configuration de référence et S_t la configuration actuelle du milieu.

Cette fonctionnelle est, en général, non linéaire et très peu pratique à manier. C'est pourquoi, on l'approxime souvent sous forme d'un développement en série d'intégrales multiples ([3], [5], [2], [7]). Cependant, la caractérisation expérimentale de ce type d'approche est très lourde.

On peut de plus dire que la résolution numérique qui s'en suit est très peu stable. En effet, les matrices qui interviennent sont du type de Van-DerMonde, qui, bien que toujours inversibles, sont très peu stables du fait des différences d'ordre de grandeur des termes diagonaux. On lira avec intérêt, à ce sujet, l'article de M. H. Gradowczyk (1969) [4] qui montre que si on prend en compte l'erreur d'expérimentation liée à la précision finie de l'appareillage, plus on augmente l'ordre du développement, plus l'erreur commise est grande.

2. Le modèle Pseudo-Linéaire

2.1. Formulation générale

Pour formuler une loi de comportement en viscoélasticité non linéaire, on se restreint à l'étude d'un certain type de matériaux pour lesquels on suppose qu'il existe un couple tensoriel contrainte/déformation $(\underline{\underline{\mathbb{S}}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}})$, $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ fonction tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$,(le tenseur de Cauchy-Green) telle que la relation de comportement entre $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ et la contrainte $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ qui lui est énergétiquement associée, soit linéaire au sens de Boltzmann.

$\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ sera dite énergétiquement associée à $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ si on vérifie l'égalité entre les puissances internes :

$$P\, d\Omega_o = \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\, d\Omega_o = \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\, d\Omega_o \tag{3}$$

On postule donc la forme suivante pour Ψ, l'énergie libre du matériau :

$$\rho_o \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{0^-}^{t} \int_{0^-}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}(2\,t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{4}$$

On impose, en outre, à la déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ d'être équivalente, aux petites déformations, à la déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$. La loi de comportement ainsi

Duhem:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) \;=\; \int_{0^-}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}} \left[\; t - \; t' \;\right] \;:\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\; dt' \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) \;=\; \left(\int_{0^-}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}} \left[\; t - \; t' \;\right] \;:\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\; dt'\right) :\; \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t) \tag{6}$$

$$D(t) \;=\; -\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(u) :\dot{\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}}\; (2t-u-v) :\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(v)\; du\; dv \tag{7}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}$ est un tenseur du quatrième ordre qui peut être assimilé au tenseur de relaxation du matériau.

L'identification totale du comportement revient à déterminer $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = f(\underline{\underline{\mathbb{C}}})$, la mesure de déformation linéarisante, et $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}(t)$, le tenseur de relaxation.

2.2. Cas des matériaux isotropes

L'isotropie du matériau et la relation isotrope liant $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ à $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ imposent que le tenseur de relaxation soit de la forme:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}(t) \;=\; \lambda(t)\underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu(t)\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{1}}}}} \tag{8}$$

La loi de comportement d'un matériau compressible s'écrit alors:

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) = \left(\int_{0^-}^{t} \left[\lambda\left(t-t'\right) Tr\left(\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\right)\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\left(t-t'\right)\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\right]\; dt'\right) : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t) \tag{9}$$

Si l'on ajoute une liaison interne d'incompressibilité, le comportement devient:

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) \;=\; \left(\int_{0^-}^{t} \left[\lambda\left(t \;-\; t'\right) Tr\left(\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\right)\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; 2\mu\left(t \;-\; t'\right)\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t')\right]\; dt'\right) : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t)$$

$$+ \quad p(t)\; \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}(t)$$

où p est un multiplicateur de Lagrange déterminé par les conditions aux limites et l'équilibre.

2.3. Identification

Nous nous restreindrons, dans ce paragraphe, au cas des matériaux isotropes compressibles. L'identification du comportement peut se faire entièrement à partir d'expériences de relaxation. L'idée la plus simple consiste à réaliser de vraies expériences de relaxation, c'est à dire que l'on impose une déformation du type $\underline{\underline{\mathbb{E}}} \;=\; \underline{\underline{\mathbb{E}}}\; H\left(t-t_0\right)$. Dans ce cas, l'histoire du tenseur de Piola-Kirchhoff 2 peut s'écrire, d'après (**6**), sous la forme:

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) \;=\; \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\;(t) : \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}} \tag{10}$$

2.3.1. Mesure linéarisante. La déformation linéarisante pourra être identifiée à l'équilibre ce qui revient à traîter le problème comme un problème d'hyperélasticité et la contrainte à l'équilibre s'écrit:

$$\underline{\underline{\Pi}}_{\infty} \;=\; \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\;\infty : \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}} \tag{11}$$

Les matériaux hyperélastiques sont des matériaux dont le comportement dérive d'un potentiel ψ, fonction convexe du tenseur des déformations. Dans le cas isotrope, ψ peut être écrit comme une fonction des trois invariants

$I_3^{\Delta} \;=\; \dfrac{1}{3}\; tr\left(\underline{\underline{\Delta}}^3\right)$.

On peut rechercher une mesure généralisant la mesure de Green-Lagrange sous la forme:

$$\underline{\underline{E}} \;=\; a\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)\;\underline{\underline{\Delta}} \tag{12}$$

telle que

$$\psi \;=\; \frac{1}{2}\left[\lambda\;[Tr\;(\underline{\underline{E}})]^2 \;+\; 2\;\mu\;Tr\;(\underline{\underline{E}})^2\right] \tag{13}$$

où $a\,(0,0,0) \;=\; 1$ pour s'assurer de l'équivalence aux petites déformations. En reportant alors (**12**) dans la relation (**13**), on obtient:

$$\psi \;=\frac{1}{2}\lambda\; a^2\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)\;I_1^{\Delta^2} \;+\; \mu\; a^2\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)\;I_2^{\Delta} \tag{14}$$

D'autre part, on peut écrire Ψ sous la forme :

$$\psi \;=\frac{1}{2}\;\left[\alpha\;I_1^{\Delta^2} \;+\; 2\;\beta I_2^{\Delta}\right] \;+\tilde{\psi}\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right) \tag{15}$$

où $\tilde{\psi}$ est une fonction au moins du troisième ordre en $\underline{\underline{\Delta}}$.

Pour avoir l'équivalence de toutes les mesures aux petites déformations, on doit donc avoir :

$$\begin{cases} \lambda \;=\; \alpha \\ \\ \mu \;=\; \beta \end{cases} \tag{16}$$

soit encore :

$$\begin{cases} \lambda \;=\; \dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 I_1^{\Delta}}\,(0,0,0) \\ \\ \mu \;=\; \dfrac{\partial\psi}{\partial I_2^{\Delta}}\,(0,0,0) \end{cases} \tag{17}$$

Ainsi, la fonction $a\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)$ recherchée est la racine positive de l'équation:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial I_2^{\Delta}}\,(0,0,0)\;\;I_2^{\Delta} \;+\; \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 I_1^{\Delta}}\,(0,0,0)\;\;I_1^{\Delta^2}\right]\;a^2 - \Psi\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right) \;=0 \tag{18}$$

soit :

$$a\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right) \;=\; \sqrt{\frac{\psi\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)}{\dfrac{\partial\psi}{\partial I_2^{\Delta}}\,(0,0,0)\;\;I_2^{\Delta} \;+\; \dfrac{1}{2}\;\dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 I_1^{\Delta}}\,(0,0,0)\;\;I_1^{\Delta^2}}} \tag{19}$$

La fonction a ainsi obtenue est une fonction positive croissante en vertu de la convexité du potentiel ψ et elle satisfait l'équivalence aux petites déformations. On peut donc déterminer une mesure linéarisante $\underline{\underline{E}}$ à partir de la connaissance du potentiel d'énergie libre à l'équilibre du matériau considéré.

Toutefois, ce genre de linéarisation a pour inconvénient de ne pas prendre en compte les effets des temps courts qui est un paramètre important des matériaux viscoélastiques. Pour remédier à cet inconvénient majeur, on cherche une mesure de la forme:

$$\underline{\underline{E}} \;=\; a_0\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)\;\underline{\underline{1}} \;+\; a_1\;\left(I_1^{\Delta}, I_2^{\Delta}, I_3^{\Delta}\right)\;\underline{\underline{\Delta}} \tag{20}$$

$$\Psi(t) \;=\; \frac{1}{2}\left[\lambda(t)\,[Tr\,(\underline{\underline{E}}(t))]^2 \;+\; 2\,\mu(t)\,Tr\,(\underline{\underline{E}}(t))^2\right] \tag{21}$$

pour une expérience de relaxation. Pour s'assurer de l'équivalence aux petites déformations, on impose $a_0\,(0,0,0) \;=\; 0$ et $a_1\,(0,0,0) \;=\; 1$.
Dans ce cas, on identifie le comportement par rapport à deux potentiels, l'un aux temps courts Ψ_0, l'autre aux temps longs Ψ_∞.
On trouve alors comme fonctions pour la mesure linéarisante :

$$\begin{cases} a_1\;\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) \;=\; \sqrt{\dfrac{(3\lambda_0 \;+\; 2\mu_0)\;\Psi_\infty \;-\; (3\lambda_\infty \;+\; 2\mu_\infty)\;\Psi_0}{(\mu_\infty\;\lambda_0 \;-\;\mu_0\lambda_\infty)\;\left(6\;I_2^\Delta \;-\; {I_1^\Delta}^2\right)}} \\ \\ a_0\;\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) \;=\; \dfrac{-a_1\;I_1^\Delta}{3} \;+\; \dfrac{sgn\left(I_1^\Delta\right)}{3}\sqrt{\dfrac{2\mu_\infty\Psi_0 \;-\; \mu_0\;\Psi_\infty}{(\mu_\infty\;\lambda_0 \;-\;\mu_0\;\lambda_\infty)}} \end{cases} \tag{22}$$

où $\lambda_0,\;\lambda_\infty,\;\mu_0,\;\mu_\infty$ sont les valeurs limites en 0 et l'infini de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$

2.3.2. Fonction de relaxation. Après avoir trouvé une mesure linéarisante, on compare la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 qui en découle à la contrainte définie par **(10)**. On détermine ainsi, par identification directe, les fonctions de relaxation $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

3. Validation numérique du modèle

Pour savoir si le modèle pseudo-linéaire présente une certaine généralité, nous allons tenter d'approcher le comportement d'un matériau connu. Ce comportement s'exprime sous une forme différente de celle du modèle pseudo-linéaire. Pour cela, nous utilisons un modèle de Pipkin (1964) [8], développement fonctionnel de $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$ au troisième ordre pour les matériaux isotropes incompressibles. Dans ce cas, le principe d'indifférence matérielle impose que la contraine de Cauchy s'écrive sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{\sigma}} \;=\; \mathbf{R}\;\underline{\underline{\mathbb{Q}}}\;\mathbf{R}^t \;+\; p_0\;\underline{\underline{\mathbf{1}}} \tag{23}$$

avec:
- $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur de contraintes de Cauchy
- $\mathbf{R}$: rotation issue de la décomposition polaire de $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$
- $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$: une fonctionnelle de $\underline{\underline{\Delta}}$
- p_0 : constante indéterminée

Le comportement de Pipkin s'écrit:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{Q}}}\;(t) \;&=\; \int_{t_0}^{t} r_1(t-\tau_1)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1)d\tau \;+\; \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} r_2(t-\tau_1,t-\tau_2)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\ &+\; \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} r_3(t-\tau_1,t-\tau_2,t-\tau_3)Tr\left[\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2)\right]\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &+\; \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} r_4(t-\tau_1,t-\tau_2,t-\tau_3)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2)\dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

Numériquement, la détermination de la fonction de relaxation pourrait se faire, selon la théorie vue au chapitre précédent [10], par un essai de traction ou de relaxation (pour les matériaux compressibles). Cette méthode sera traîtée dans un prochain article car comme on soupçonne le modèle de Pipkin de ne pas être pseudo-linéaire, nous avons opéré différemment. En effet, nous avons calé le modèle de Pipkin par rapport à des comportements à l'équilibre identifiés par des mesures connues (mesures de Seth [9], potentiels de Mooney). Nous avons ensuite simulé des essais dans une large gamme d'élongations et la détermination de la fonction de relaxation s'est faite par minimisation de l'erreur entre la contrainte calculée par la linéarisation et la contrainte de Pipkin. Nous avons restreint l'ensemble des mesures linéarisantes aux deux types suivants :

3.1.1. LES MESURES DE SETH :

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} \;=\; \frac{1}{m}\left(\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\frac{m}{2}} \;-\; \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right) \tag{24}$$

On détermine la valeur de m qui linéarise le comportement à l'équilibre en minimisant l'erreur entre la contrainte de Pipkin et celle calculée par le modèle.

3.1.2. LES POTENTIELS DE MOONEY-RIVLIN :

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} \;=\; \sqrt{\frac{C_1\left(I_1^C \;-\; 3\right) \;+\; C_2\left(I_2^C \;-\; 3\right)}{2\;\left(C_1 \;+\; C_2\right)\;tr\left(\underline{\underline{\Delta}}^2\right)}} \tag{25}$$

On détermine C_1 et C_2 par le même procédé que précédemment.

3.2. MÉTHODOLOGIE

La validation se fait en quatre étapes :

1. Identification des paramètres linéarisants à partir d'essais de (traction + cisaillement) / relaxation suivant les principes suivants (figure 1):
   - projection sur l'équilibre des courbes de contraintes générées
   - calcul des potentiels de Mooney-Rivlin et des mesures de Seth linéarisant le comportement à l'équilibre
   - calage des potentiels ou des mesures sur les points de Pipkin.
2. Calcul des fonctions de relaxation
3. Vérification à partir du modèle pseudo-linéaire
4. Simulations de réponses sous chargements complexes et comparaison des résultats (figures 2 et 3).

3.3. RÉSULTATS

Pour cette simulation, nous avons choisi les noyaux de Pipkin de la forme:

$$\begin{cases} r_1\ (t) \ = \ 3 \ + \ 2\ exp\ (-0.05\ t) \\ \\ r_2\ (t_1, t_2) \ = \ 0 \\ \\ r_3\ (t_1, t_2, t_3) \ = 0.5 \ + \ exp(-0.003\ (t_1 + t_2 + t_3)) \\ \\ r_4\ (t_1, t_2, t_3) \ = \ exp(-0.001\ (t_1 + t_2 + t_3)) \end{cases} \tag{26}$$

Le choix de la forme de ces noyaux a été fait sur la base d'un certain nombre de constatations. On sait que les fonctions de relaxation sont des fonctions décroissantes du temps. Ainsi, dans un souci de simplifier les intégrations numériques, nous avons préféré la forme exponentielle à la forme puissance. En revanche, le choix de r_2 nulle résulte des résultats expérimentaux que nous avons pu trouver dans la littérature ([7], [6]), et qui montrent soit un noyaux r_2 nul, soit une fonction négative. Ceci nous permet aussi d'assurer simplement que la fonctionnelle d'énergie élastique est positive : il n'y subsiste alors que des termes quadratiques ou du quatrième ordre. Etant donné que l'on n'a pas étudié précisément les contraintes de type énergétique que l'on doit vérifier, ce choix s'avère suffisant pour respecter les principes de la Thermodynamique.

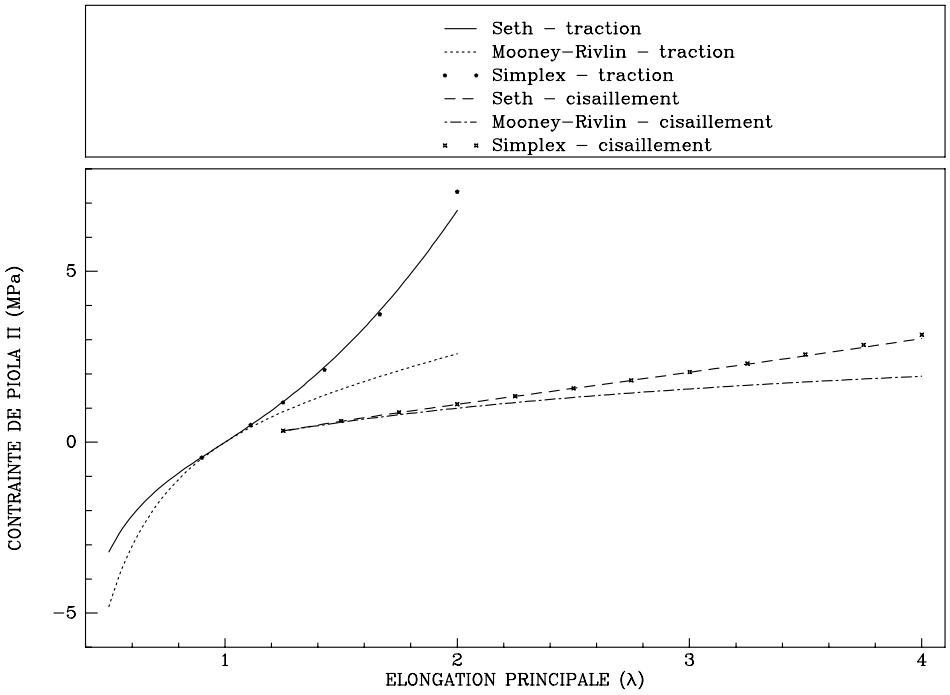

FIGURE 1. Calage des mesures linéarisantes

Sur la figure 1 nous avons représenté les contraintes de Pipkin à l'équilibre, en traction / compression et en cisaillement. Nous avons ensuite représenté les contraintes calculées avec les mesures de Seth et les potentiels de Mooney-Rivlin. Ces courbes montrent que les mesures de Seth calent mieux le modèle

que ce modèle permet de rendre compte des non-linéarités, même fortes (développement au troisième ordre) et que la restriction de l'ensemble des mesures linéarisantes, bien que très forte, n'est pas trop limitative. La figure 2 montre des résultats pour des chargements complexes tels qu'un cisaillement suivi d'une traction. L'intérêt de tels chargements est la rotation de la direction de sollicitation. Cette figure montre une bonne concordance avec le modèle de Pipkin. En revanche, pour deux cisaillements alternés avec deux tractions (figure 3), les résultats sont convenables pour les trois premiers chargements et s'écartent du modèle de Pipkin lors du dernier chargement. Toutefois, cette différence n'est pas trop pénalisante dans la mesure où ce type de chargement n'est pas vraiment réaliste. Ces simulations ont été effectuées en choisissant les mesures de Seth comme mesures l! inéarisantes.

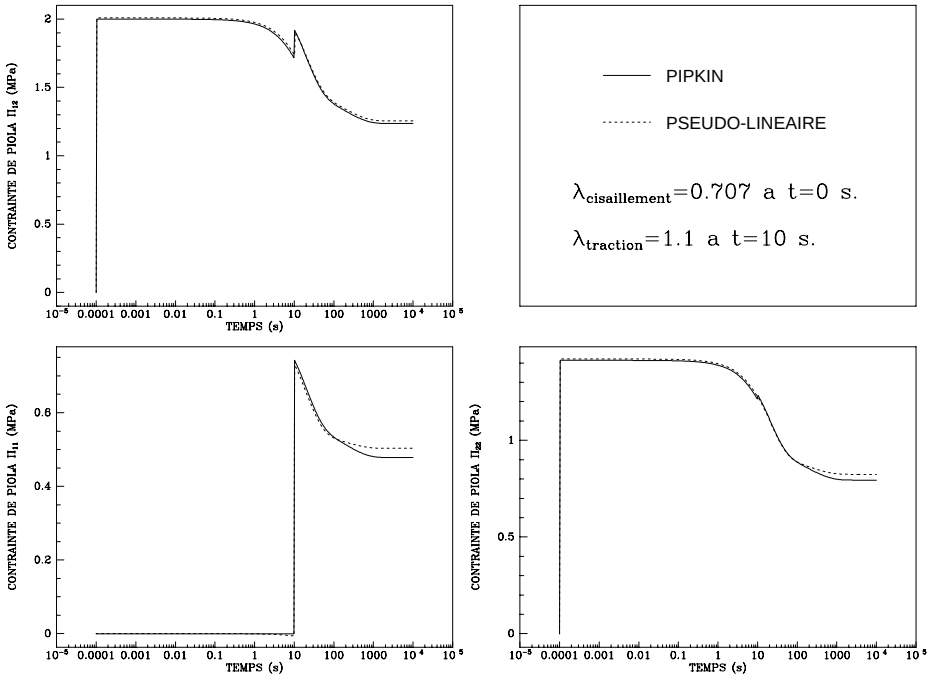

FIGURE 2. Simulations d'un cisaillement suivi d'une traction

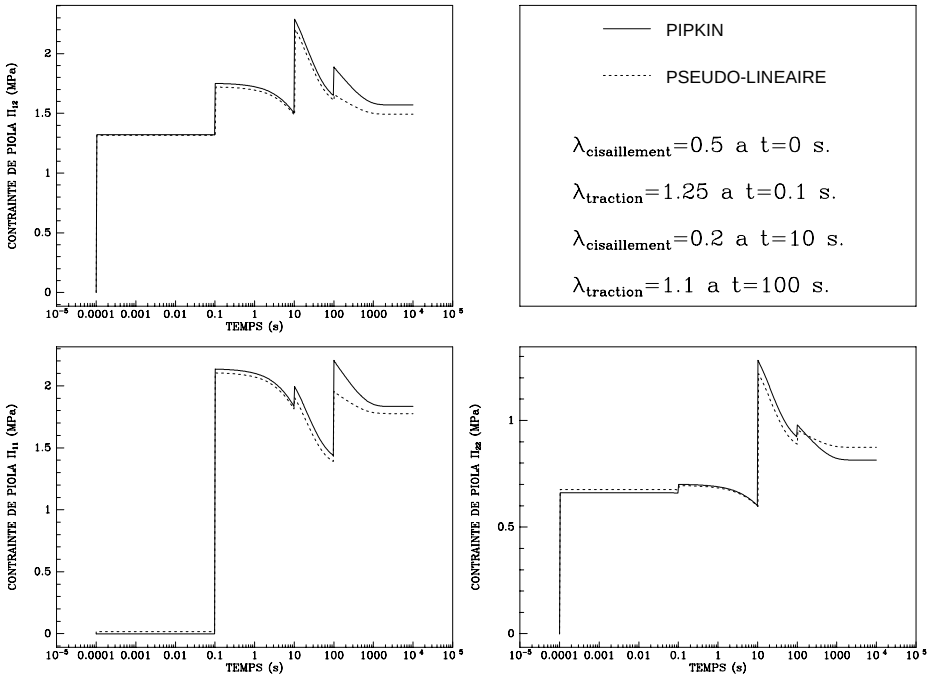

FIGURE 3. Simulation de deux cisaillements alternés avec deux tractions

Dans le cadre de ce travail, nous avons défini un modèle permettant de modéliser le comportement viscoélastique en tenant compte des grandes déformations et des non-linéarités tout en permettant de calculer, à chaque instant, la dissipation visqueuse [10]. Ce modèle a montré de bonnes concordances, dans un exemple, avec le modèle de Pipkin. De plus, nous avons établi une formulation variationnelle, qui fera l'objet d'un prochain article, associée à ce modèle dont il reste à trouver une méthode de résolution afin de l'intégrer dans un code de calcul par éléments finis. Ceci nous permettra alors de faire du calcul de structures à partir de ce modèle.

References

[1] A. Alaoui Soulimani. *Une méthode énergétique de modélisation de la viscoélasticité non linéaire en grandes déformations.* Thèse ENPC (1993).

[2] B. D. Coleman *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics.* Arch. Rat. Mech. Anal. 17, pp 1-46 (1964).

[3] M. Frechet. *Sur les fonctionnelles continues.* Ann. Sci. 27, pp 193-216 (1910).

[4] M. H. Gradowczyk. Int. J. Solids Structures 5, pp 873-877 (1969).

[5] A. E. Green and S. Rivlin. Arch. Rat. Mech. Anal. 1, pp 1-21 (1957).

[6] S. Y. Lay and W. N. Findley. *A modified superposition principle applied to creep of nonlinear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress.* Transactions of the society of rheology 11:3, pp 361-380 (1967).

[7] F. J. Lockett. Int. J. Eng. Sci. 3, pp 59-75 (1965).

[8] A. C. Pipkin. *Small finite deformations of viscoelastic solids.* Reviews of Modern Physics, pp 1034-1041 (Oct. 1964).

[9] B. R. Seth. *Generalized strain measure with application to physical problems.* in Reiner M. and Abir D. (eds), Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics, Pergamon, Oxford pp162-172 (1964).

[10] S. Hassani, A. Alaoui Soulimani and E. Ehrlacher. *A nonlinear viscoelastic model: the pseudo-linear model.* Soumis.

ENPC-CERAM, Central IV , 1, av Montaigne, 93167 Noisy-le-Grand Cedex